

Expansão, equilíbrio, crescimento e colapso de bolhas

Gil Bazanini^{1,2} , Ricardo Kirchof²  & Sierlene Zago³

- (1) Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Departamento de Engenharia Mecânica, Rua Tenente Antônio João, Bom Retiro 89223-100, Joinville, Santa Catarina, Brasil. E-mail: gil.bazanini@udesc.br
- (2) Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Departamento de Tecnologia Industrial, Rua Luiz Fernando Hastreiter 180, Centenário 89283-081, São Bento do Sul, Santa Catarina, Brasil. E-mail: ricardo.unfer@udesc.br
- (3) Prefeitura Municipal de Joinville, Avenida Hermann August Lepper 10, Centro 89221-901, Joinville, Santa Catarina, Brasil. E-mail: sirlene.zago@edu.joinville.sc.gov.br

Bazanini G., Kirchof R. & Zago S. (2026) Expansão, equilíbrio, crescimento e colapso de bolhas. *Pesquisa e Ensino em Ciências Exatas e da Natureza*, 10(2026): e8075.
<https://doi.org/10.5281/zenodo.20428075>

Editor acadêmico: Silvio F. B. Lima. **Recebido:** 09 fevereiro 2026. **Aceito:** 06 maio 2026. **Publicado:** 28 maio 2026.

Resumo: No presente trabalho, as equações do modelo de crescimento (atualmente em expansão) do universo esférico finito da cosmologia são adaptadas ao estudo do colapso e crescimento de bolhas de ar e vapor em meios líquidos (cavitação). O modelo estudado, por ser essencialmente analítico e relativamente simples, tem a vantagem de prescindir de simulações e outros métodos numéricos ou computacionais. Esta adaptação, ou seja, a utilização das equações do universo esférico a uma bolha de cavitação, a menos das constantes, as quais precisaram ser determinadas aqui para este caso específico, apresentou bons resultados. As diferenças na aplicação desta analogia mostraram-se mais acentuadas nas proximidades do ponto de singularidade, o qual corresponderia a uma bolha (ou universo) de dimensões nulas e densidade infinitas. Também foram efetuados cálculos da velocidade e da aceleração do colapso da bolha.

Palavras chave: Bolhas, crescimento, colapso, universo.

Bubbles Expansion, Balance, Growth and Collapse

Abstract: In the present work, the equations describing the growing of the spherical finite universe from the cosmological models are applied to the study of growth and collapse of vapor and air bubbles in liquids. The analytical and relatively simple nature of the model offers the advantage of obviating the need for numerical or computational simulations. First of all, it was necessary to determine the numerical constants of the equation. The use of such equations, after the determinations of those numerical constants, showed good results. The differences on these results are mainly in the proximities of the singularity point where, by definition, we should have zero dimensions and an infinity mass. It was also performed calculations of the velocity and the acceleration of the bubble collapse.

Key words: Bubbles, growth, collapse, universe.

Introdução

Desde o trabalho pioneiro de Besant (1859), considerando a aniquilação instantânea de uma bolha esférica de fluido contida numa massa infinita de fluido homogêneo e incompressível em repouso e livre de forças externas, cujo vazio tende a ser preenchido imediatamente pelo líquido circundante, diversas equações têm sido propostas ao longo das últimas décadas, visando explicar a formação, colapso e crescimento de bolhas de ar ou vapor em meios líquidos.

O presente trabalho justifica-se pelo fato de que a equação que descreve o crescimento e/ou colapso de bolhas, ou cavidades, em meios líquidos, em sua forma mais completa, conhecida como Equação de Rayleigh-Plesset (Brennen 1995), não possui soluções analíticas exatas conhecidas, quando muito soluções aproximadas e relativamente complicadas (vide apêndice). Como alternativa, equações mais simples e práticas podem ser desenvolvidas e aplicadas, valendo-se de uma analogia entre o crescimento de uma bolha e o modelo do universo esférico finito da cosmologia, o qual encontra-se atualmente em processo de crescimento (expansão), conforme apresentado na sequência. Equações simples que descrevam o fenômeno podem ser úteis para simular a resistência de materiais e seus revestimentos em condições de cavitação, tais como rotores de bombas, hélices de barcos e estruturas hidráulicas submersas. Alguns outros trabalhos interessantes mostrando colapso ou oscilações de bolhas podem ainda serem citados: Prosperetti (1986), Muller *et al.* (2012) e Bazanini & Bressan (2017), onde as simulações são validadas mediante medições do raio da bolha em função do tempo.

A partir da análise de fotografias, sabe-se o colapso das cavidades, ou bolhas, mantém-se simétrico até próximo do seu colapso (Sun *et al.* 2025). Assim, pode-se assumir simetria esférica para o colapso de bolhas, já que esta simetria é quebrada apenas nos estágios finais do processo, onde a velocidade de colapso é extremamente elevada, já nas proximidades do ponto de singularidade, onde teríamos, em tese, raio zero, e densidades e velocidades de colapso infinitas.

Embora as singularidades constituam entes matemáticos úteis, as mesmas não são muito bem explicadas ou aproveitadas na física ou na engenharia, sendo inclusive indesejáveis. Na verdade, Lifshitz e Khalatnikov demonstraram, em 1963, que uma solução geral das equações de campo não deve apresentar singularidades (Landau & Lifshitz 1980).

O modelo de bolhas preenchidas com ar e vapor aqui é condizente com modelos atuais de cosmologia onde o raio do universo nunca atinge o valor zero, ou seja, não existem singularidades, tais como raio zero e densidade infinita, por exemplo.

Durante o crescimento de uma bolha esférica, um observador localizado num ponto qualquer verá os demais pontos afastando-se radialmente uns dos outros. O inverso ocorrerá no caso do colapso da bolha, bastando para isto, em um estudo teórico, inverter a direção da variável tempo, já que as equações da mecânica clássica não se alteram quando o sinal do tempo é invertido (Landau & Lifshitz 1966).

Metodologia

Equilíbrio das bolhas

A **Figura 1** mostra as tensões atuantes no hemisfério superior de uma bolha. O hemisfério inferior é equilibrado pelas tensões superficiais.

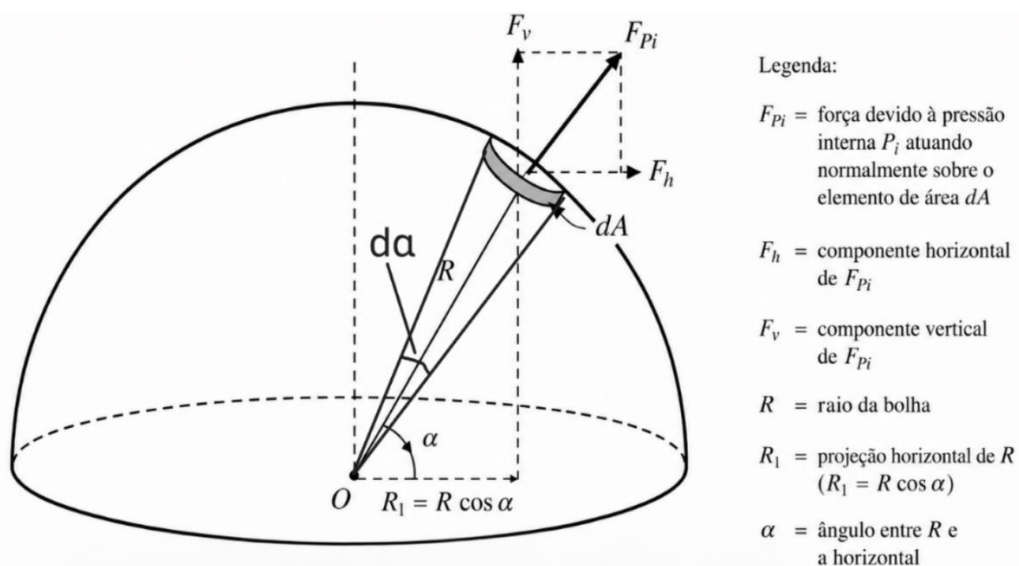


Figura 1. Tensões que atuam no hemisfério superior.

Colapso e crescimento de bolhas

Um elemento de área dA em forma de anel (**Figura 1**) está sob ação de uma força F_{P_i} devido a pressão interna P_i . Decompondo essa força nas direções horizontal e vertical tem-se, respectivamente, as **Equações (1)** e **(2)**:

$$F_h = F_{P_i} \cos \alpha \quad (1)$$

e

$$F_v = F_{P_i} \sin \alpha \quad (2)$$

Cada componente horizontal é anulada por outra diametralmente oposta e de sentido contrário, ao longo do perímetro, restando as verticais que deverão ser equilibradas pela tensão superficial S . Pela **Figura 1**:

$$R_1 = R \cos \alpha \quad (3)$$

O elemento de área dA é:

$$dA = 2\pi R_1 R d\alpha \quad (4)$$

Substituindo a **Equação (3)** na **Equação (4)**, resulta na **Equação (5)**:

$$dA = 2\pi R^2 \cos \alpha d\alpha \quad (5)$$

A componente vertical é dada pela **Equação (6)**:

$$F_v = \int_A P_i \sin \alpha dA \quad (6)$$

Substituindo a **Equação (5)** na **Equação (6)**, resulta para o hemisfério superior:

$$F_v = \int_0^{\pi/2} 2\pi P_i R^2 \sin \alpha \cos \alpha d\alpha \quad (7)$$

Integrando por partes, resulta:

$$F_v = \pi P_i R^2 \quad (8)$$

A força devido a S será:

$$F_S = 2\pi S R \quad (9)$$

Como F_v e F_S devem ser iguais:

$$P_i R = 2S \quad (10)$$

Ou:

$$P_i = \frac{2S}{R} \quad (11)$$

Havendo alguma pressão externa, devida a presença de líquido, por exemplo, tem-se a **Equação (12)**:

Colapso e crescimento de bolhas

$$P_i - P_L(R) = \frac{2S}{R} \quad (12)$$

O que resulta num confronto entre pressões atuando na parede da bolha, quais sejam, a da tensão superficial e a diferença de pressões estáticas atuando diretamente na bolha.

Colapso e crescimento

Para o raio da bolha R em função do tempo t , equações na forma polinomial foram obtidas por Bazanini & Unfer (2025), baseado em resultados de origem experimental, uma das quais, obtida por regressão polinomial de 4ª ordem pelo método dos mínimos quadrados, aparece na forma:

$$R = 1.10245t^4 - 6.16327t^3 - 1.03998t^2 - 0.298213t + 3.53815 \quad (13)$$

Escrevendo a **Equação (13)** no sistema internacional de unidades, e impondo a condição inicial $R(0) = R_0$ visando dar consistência física ao modelo, resulta:

$$R = 1.10245 \times 10^9 t^4 - 6.16327 \times 10^6 t^3 - 1.03998 \times 10^3 t^2 - 0.298213t + R_0 \quad (14)$$

Para obter a velocidade e a aceleração da parede da bolha (em módulo) basta fazer:

$$|V| = \frac{dR}{dt} = 4,4098 \times 10^9 t^3 - 18,48981 \times 10^6 t^2 - 2,07996 \times 10^3 t - 0.298213 \quad (15)$$

$$|A| = \frac{d^2R}{dt^2} = 13,2294 \times 10^9 t^2 - 36,97962 \times 10^6 t - 2,07996 \times 10^3 \quad (16)$$

A partir das soluções das **Equações (14), (15) e (16)** para o colapso da bolha, pode-se montar a **Tabela 1** a seguir:

Tabela 1. Raio R , velocidade V e aceleração A da bolha em função do tempo t , durante o colapso.

$R \text{ (m)} \times 10^3$	3,50	3,35	3,16	2,85	2,39	1,76
$t \text{ (s)} \times 10^3$	0,00	0,20	0,30	0,40	0,50	0,6
$ V \text{ (m/s)}$	0,30	1,42	2,47	3,81	5,41	7,25
$ A \text{ (m/s}^2\text{)} \times 10^{-3}$	2,08	8,94	12,00	14,75	17,26	19,50

Onde pode-se observar a aceleração da parede da bolha à medida que o colapso pode atingir valores da ordem de 10^{12} m/s^2 durante a dinâmica da cavidade (Man *et al.* 2018). Os valores da velocidade e da aceleração estão em módulo na **Tabela 1**, já que, como o raio da bolha reduz com o tempo durante o colapso, as **Equações (15) e (16)** resultam em valores negativos para os mesmos. Como pode-se verificar, não apenas a velocidade sofre variação, mas também a taxa de variação desta velocidade (a aceleração da parede da bolha) também sofre alteração. Os resultados da velocidade de colapso mostraram-se próximos dos resultados obtidos numericamente por Bazanini *et al.* (1998). A vantagem aqui é de se trabalhar com equações analíticas simples.

Conforme Brennen (1995), o colapso e o crescimento de uma bolha podem ser aproximados pela relação:

$$R = R^* t^n \quad (17)$$

onde R^* e n são constantes.

Nos estágios finais do colapso de bolhas, ocorrem ainda dois fenômenos: ondas de choque e microjatos, responsáveis pela erosão em estruturas e equipamentos hidráulicos.

Expansão: Analogia com o Universo Esférico

O caso de um universo esférico fechado finito em expansão está de acordo com as mais recentes descobertas a respeito do “Big Bang” e da radiação cósmica de fundo (Novello 2014), nas quais sua energia em micro-ondas, atualmente correspondente a uma temperatura de 2,73 K, a qual diminuirá gradualmente com a expansão até atingir as proximidades do zero absoluto, onde então terá exaurido sua energia, cessando finalmente sua expansão e, com isto, delimitando as fronteiras do universo.

Em larga escala, o universo finito esférico pode ser considerado uma esfera em crescimento. Deste modo, uma analogia pode ser feita com uma bolha, ou bolha, a qual também passa por processo de crescimento (ou expansão) antes de atingir seu ponto de raio máximo, a partir do qual tem início o seu colapso (Bazanini *et al.* 2020; Novello 2023).

Uma equação proposta para a expansão do universo, muito semelhante à **Equação (17)** para o crescimento do universo é a **Equação (18)** (Acosta *et al.* 1975), restando ainda definir seu coeficiente:

$$R = A t^{2/3} \tag{18}$$

onde o coeficiente A é uma constante.

Procuraremos a seguir adaptar a equação do modelo de expansão do universo esférico (**Equação 18**) ao caso da expansão (ou colapso) de uma bolha de cavitação, sendo para isto necessário determinar uma constante A que proporcione uma boa correlação para o fenômeno.

Resultados e Discussão

Inicialmente, para uma melhor visualização do comportamento da velocidade e da aceleração da parede da bolha em função do tempo de colapso, geramos, a partir da **Tabela 1**, as **Figuras 2** e **3**, respectivamente. Na **Figura 2**, os resultados da velocidade de colapso são comparados com os calculados numericamente por Bazanini *et al.* (1998). Pode-se observar duas situações: comportamento quase assintótico da velocidade e resultados compatíveis com os calculados por Bazanini *et al.* (1998). Quanto a aceleração esta apresentou uma taxa de crescimento aproximadamente constante, revelando valores bastante altos, o que é fisicamente esperado em cavitação produzindo ondas de choque (**Figura 3**).

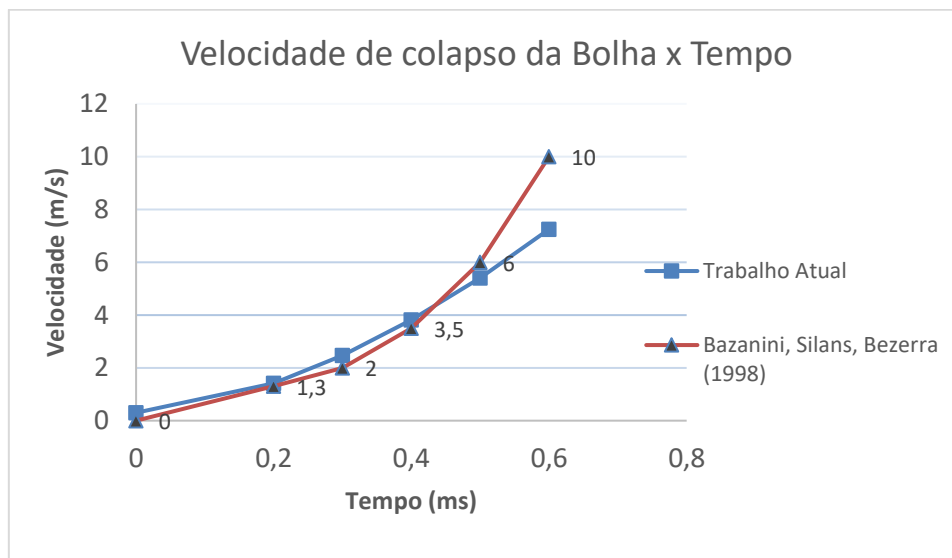


Figura 2. Módulo da velocidade de colapso da bolha em função do tempo.

Observa-se que os resultados obtidos teoricamente por Bazanini *et al.* (1998) apresentam valores maiores que os oriundos de medições experimentais do trabalho atual. A velocidade tende a infinito (assíntota), uma vez que o vapor d'água foi considerado como gás perfeito no equacionamento pré-modelagem (Bazanini *et al.* 1998) e nas proximidades dos pontos de singularidade teríamos volume zero e pressão infinita por definição.

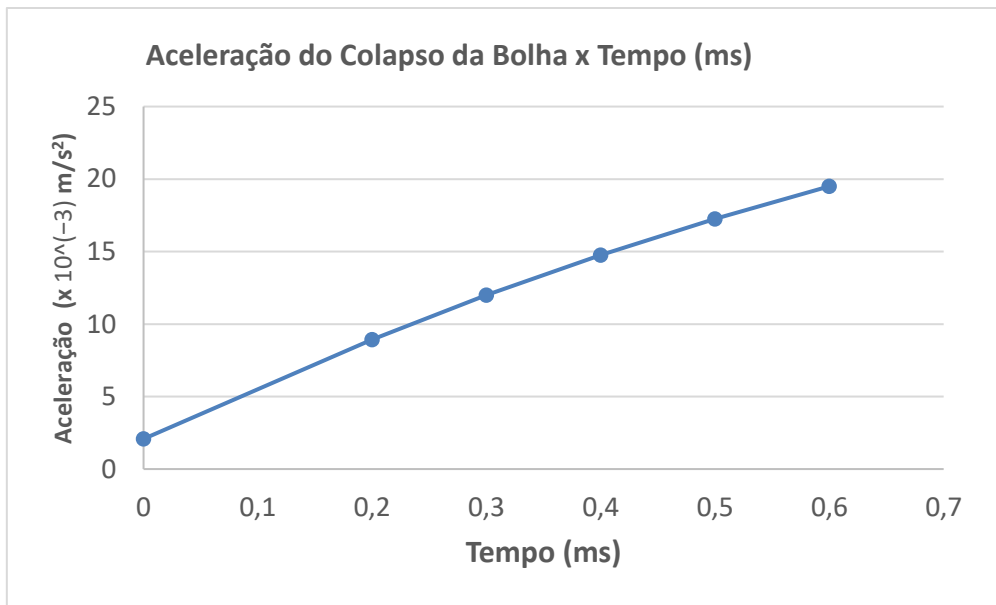


Figura 3. Módulo da aceleração do colapso da bolha em função do tempo.

Invertendo o sentido da variável tempo em relação ao raio da bolha da **Tabela 1**, pode-se obter os dados da **Tabela 2** abaixo, agora portanto para o crescimento da bolha. A inversão temporal é viável já que a ordem do tempo não apresenta uma direção preferencial nas equações da mecânica. Na verdade, tal inversão temporal se faz necessária já que o presente estudo refere-se ao colapso das bolhas, enquanto o universo está atualmente em expansão, podendo futuramente vir a colapsar.

Tabela 2. Raio da bolha em função do tempo, durante o crescimento de uma bolha, desconsiderando o ponto inicial (singularidade).

Raio (mm)	1,76	2,39	2,85	3,16	3,35	3,50
Tempo (ms)	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60

Trabalhando com os dados da **Tabela 2** e a **Equação (6)**, assumindo, portanto, o valor de 2/3 para o expoente da variável tempo, pode-se ajustar para o coeficiente do raio da bolha por mínimos quadrados com expoente fixo, resultando num valor aproximado de 4,9; para a obtenção de resultados do raio da bolha em função do tempo, priorizando resultados longe do ponto de singularidade, ou seja, tempos maiores, e resultando na **Equação (19)**, a qual foi utilizada nos cálculos subsequentes.

$$R = 4,9 t^{2/3} \tag{19}$$

Tais resultados são apresentados na **Tabela 3** para o crescimento da bolha, de forma comparativa.

Tabela 3. Resultado comparativo entre o modelo de universo esférico finito e a bolha de vapor, para crescimento, desconsiderando o ponto inicial (singularidade).

Tempo (ms)	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60
Raio, Tab. 2 (mm)	1,76	2,39	2,85	3,16	3,35	3,50
Raio, Eq. (19), mm	1,06	1,68	2,20	2,66	3,09	3,49

Na **Tabela 3** pode-se observar a boa concordância entre os resultados obtidos da cavitação e os obtidos da cosmologia longe do ponto de singularidade, bastando para isto ajustar o coeficiente R^* .

A partir dos resultados obtidos por Zhang *et al.* (2017), pode-se obter os resultados mostrados na **Tabela 4** abaixo, para o raio da bolha em função do tempo para crescimento. Estes resultados são comparados com os calculados pela **Equação (19)**:

Tabela 4. Resultado comparativo entre os resultados de Zhang *et al.* (2017) e a **Equação (19)**, para o raio da bolha em função do tempo, para crescimento.

Tempo (s)	0,042	0,050	0,060	0,070	0,080	0,098
Raio, Zhang <i>et al.</i> (2017), (mm)	0,1	0,4	0,6	0,8	0,9	1,0
Raio, Equação (19) , mm	0,59	0,66	0,74	0,83	0,90	1,04

Colocando a **Tabela 4** em forma de gráfico, geramos a **Figura 4**, para uma melhor comparação dos resultados.

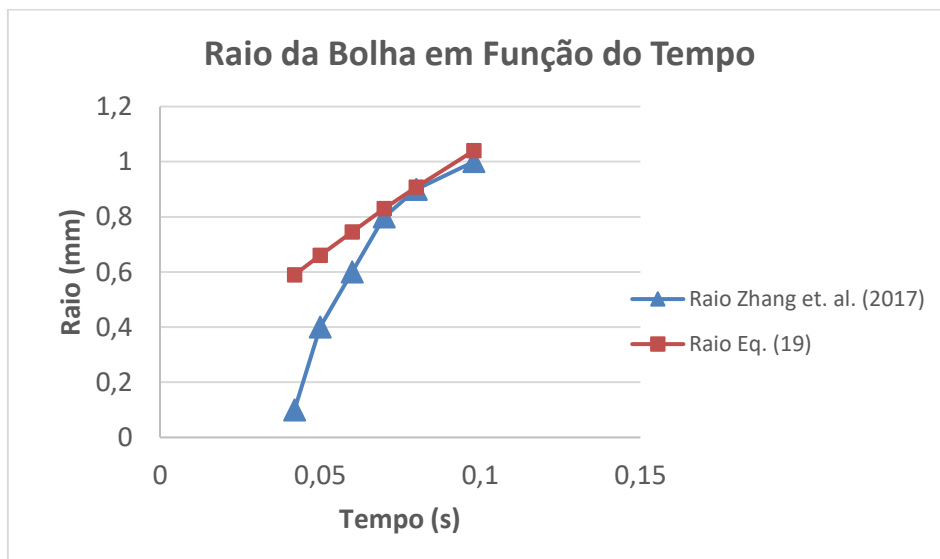


Figura 4. Raio da bolha em função do tempo.

Novamente pode-se observar bons resultados para o modelo apresentado neste trabalho, à exceção dos pontos nas proximidades da singularidade, podendo-se obter maior ou menor precisão ajustando o coeficiente e o expoente da **Equação (19)** para cada caso.

Conclusões

O modelo atual propõe uma equação relativamente simples para o colapso de bolhas em meios líquidos, sem a necessidade de utilizar simulações numéricas ou códigos computacionais. Este modelo é baseado na equação da expansão de um universo esférico finito, sendo necessário inverter o sentido da variável tempo na equação existente, a qual foi concebida para o colapso de bolhas. A adaptação do modelo apresentado mostrou bons resultados, exceto nas proximidades do ponto de singularidade, o que já era previsto, uma vez que a singularidade representa uma

idealização matemática que não se manifesta integralmente em fenômenos físicos reais. Assim, quanto mais distante do ponto de singularidade, melhores os resultados de uma maneira geral.

A analogia com bons resultados foi viável uma vez que tanto o universo conhecido como a bolha em crescimento constituem entes aproximadamente esféricos em expansão.

Pode-se verificar que a bolha, em sua fase de colapso, não apenas sofre uma aceleração, mas também esta aceleração tem um aumento à medida que o colapso prossegue, tendo a velocidade e a aceleração apresentado rápido aumento em seus valores à medida que o colapso prossegue, consistente com o fenômeno da cavitação com conseqüente geração de ondas de choque. Por ser baseado em resultados de medições, o modelo apresentado aqui tende a ser mais preciso que o obtido anteriormente por modelagem numérica o qual tende a apresentar assíntotas para a velocidade nas proximidades dos pontos de singularidade. Além disso, a modelagem numérica de Bazanini *et al.* (1998) trabalhou com a hipótese de gás perfeito para o vapor d'água aprisionado na bolha, perdendo precisão nas proximidades dos pontos de singularidade, onde teríamos, a rigor, volume tendendo a zero e pressões tendendo a infinito, assim como no universo primordial.

Finalmente, pode-se dizer que os resultados apresentaram boa concordância com os obtidos por outros pesquisadores, constituindo uma alternativa mais simples para o estudo e cálculos da dinâmica das cavidades.

Referências

- Acosta V., Cowan C.L. & Graham B.J. (1975) Curso de Física Moderna. México: Harla. 512 p.
- Bazanini G. & Bressan J. (2017) Hot Vapor Bubble Prints on Carbon Steel. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 5: 439–448. <https://doi.org/10.4236/jamp.2017.52038>
- Bazanini G. & Unfer R.K. (2025) Theoretical Analysis of Growth and Collapse of Spherical Cavities. *Semina*, 46: e51616. <https://doi.org/10.5433/1679-0375.2025.v.46>
- Bazanini G., Unfer R.K. & Lima N.N.C. (2020) Crescimento e Colapso de Bolhas-Uma Comparação com o Modelo de Universo Infinito. *Revista Tecnológica*, 41(1): 1–11. <https://doi.org/10.5020/23180730.2020.9891>
- Bazanini G., Silans A.M.B.P. & Bezerra V.B. (1998) Colapso de Cavidades em Meios Líquidos: Um Processo Adiabático. V Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste CEM-NNE. Fortaleza, Ceará, Brasil.
- Besant W.H.A. (1859) A Treatise on Hydrostatics and Hydrodynamics. Cambridge: Cambridge University Press. 250 p.
- Brennen C.E. (1995) Cavitation and Bubble Dynamics. Oxford: Oxford University Press. 294 p.
- Landau L.D. & Lifshitz E.M. (1966) Mécanique Quantique. Théorie Non Relativiste. Moscou: Mir. 710 p.
- Landau L.D. & Lifshitz E.M. (1980) Teoria do Campo. São Paulo: Hemus. 457 p.
- Man V.H., Li M.S., Derreumaux P. & Nguyen P.H. (2018) Rayleigh-Plesset equation of the bubble stable cavitation in water: A nonequilibrium all-atom molecular dynamics simulation study. *The Journal of Chemical Physics*, 148(9): 094505. <https://doi.org/10.1063/1.5009910>
- Muller M.A.S., Zima P. & Unger J. (2012) Energy Dissipated During the Cavitation Bubble Collapse Close to a Solid Wall. Proceedings of the Eighth International Symposium on Cavitation, Singapore.
- Novello M. (2014) Do Big Bang ao Universo Eterno. Rio de Janeiro: Zahar. 130 p.
- Novello M. (2023) Construtores do Cosmos. São Paulo: Gaia. 183 p.
- Prosperetti A. (1986) Bubble Phenomena in Sound Fields. Part Two. *Ultrasonics*, 22(3): 115–124. [https://doi.org/10.1016/0041-624X\(84\)90006-4](https://doi.org/10.1016/0041-624X(84)90006-4)
- Sun Y., Yao Z., Wang C., Zhong Q., Xiao R., Ohl C.D. & Wang F. (2025) Dynamics of cavitation bubbles near a gas-entrapping rigid surface. *Journal of Fluid Mechanics*, 1013:A9. <https://doi.org/10.1017/jfm.2025.399>

Zhang J., Yu Y. & Qu C.Z.H. (2017) Experimental Study and Numerical Simulations of Periodic Bubble Formation at Submerged Micron-Sized Nozzles with Constant Gas Flow. *Chemical Engineering Science*, 168(31): 1–10. <https://doi.org/10.1016/j.ces.2017.04.012>

Apêndice

A equação de Rayleigh-Plesset a qual descreve a dinâmica da bolha é:

$$RR'' + R'^2 = \frac{1}{\rho_L} \left[P_i - P_\infty - \frac{2S}{R} - \frac{4\mu}{R} R' \right] \quad (1)$$

onde: S é a tensão superficial, R é o raio da cavidade, P_∞ é a pressão inicial externa à cavidade (no meio líquido, portanto), μ é a viscosidade do líquido, ρ_L é a densidade do líquido, P_i é a pressão no interior da cavidade. Os asteriscos denotam derivadas temporais.

A **Equação (1)** apresenta apenas soluções analíticas completas aproximadas e relativamente complexas na forma:

$$R \cong X + \frac{1}{4} \left(\frac{B}{X^2} - \frac{3C}{X^4} \right) t^2 \quad (2)$$

onde:

$$A = \frac{P_i - P_\infty}{\rho_L} \quad (3)$$

$$B = \frac{-2S}{\rho_L} \quad (4)$$

$$C = \frac{-4\mu}{\rho_L} \quad (5)$$

e

$$\frac{2A}{3} X^3 - BX^2 + C = 0 \quad (6)$$

ou soluções numéricas, tais como as efetuadas por Bazanini *et al.* (1998).