Pesquisa e Ensino em Ciências Exatas e da Natureza
Centro de Formação de Professores / Universidade Federal de Campina Grande

Pesquisa e Ensino em Ciências Exatas e da Natureza
9 (2025)
Research and Teaching in Exact and Natural Sciences

MATERIAL DIDÁTICO

ISSN 2526-8236 (edição online)
Pesquisa e Ensino em Ciências Exatas e da Natureza

Um curso básico de matemática para estudantes de graduação em física - Parte II-A

Paulo Peixoto[1] & Mário Henrique Oliveira[2]

(1) Universidade Federal de Pernambuco, Núcleo de Formação Docente. Avenida Marielle Franco, Nova Caruaru 55014-900, Caruaru, Pernambuco, Brasil. E-mail: paulo.peixoto@ufpe.br
(2) Universidade Federal Rural de Pernambuco, Unidade Acadêmica de Serra Talhada. Avenida Gregório Ferraz Nogueira, José Tomé de Souza Ramos 56909-535, Serra Talhada, Pernambuco, Brasil. E-mail: mario.oliveira@ufrpe.br

Peixoto P. & Oliveira M.H. (2025) Um curso básico de matemática para estudantes de graduação em física - Parte II-A. *Pesquisa e Ensino em Ciências Exatas e da Natureza*, 9(2025). https://doi.org/10.5281/zenodo.17178602

Editor acadêmico: Heydson H. Brito da Silva. **Recebido:** 25 junho 2025. **Aceito:** 04 setembro 2025. **Publicado:** 23 setembro 2025.

Resumo: Este texto é parte de uma série voltada a estudantes de física no início de sua graduação. Na Parte II - que pode ser estudada em paralelo à Parte I, pois independe dela - continuaremos nosso estudo de cálculo com funções reais de uma variável real, a partir do ponto em que paramos no texto "Um curso rápido de cálculo diferencial e integral para pré-universitários e calouros", publicado nesta mesma revista, e, ao final, introduziremos séries infinitas. Há várias atividades para os(as) estudantes, com respostas em um apêndice. Dividiremos a Parte II em três: II-A, II-B e II-C. Este texto é a primeira delas.

Palavras-chave: cálculo com funções reais de uma variável real, aplicações do cálculo à física.

A basic course in mathematics for undergraduate students of physics - Part II-A

Abstract: This text is part of a series aimed at physics freshman and sophomore. In Part II - which can be studied in parallel with Part I, as it is independent of it - we will continue our study of calculus in one real variable, starting from the point where we left off in the text "A short course in differential and integral calculus for pre-university students and freshmen", published in this same journal, and, after that, we will introduce infinite series. There are several tasks for the students, with answers in an appendix. We will divide Part II into three: II-A, II-B, and II-C. This text is the first of them.

Key words: calculus in one real variable, applications of calculus in physics.

1 Introdução

Este texto é o terceiro relativo ao projeto *Matemática para Física*. No primeiro texto - intitulado "Um curso rápido de cálculo diferencial e integral para pré-universitários e calouros" (Silva & Peixoto 2020) - buscamos apresentar aos estudantes conceitos básicos relacionados a *limites*, *derivadas* e *integrais* (envolvendo funções reais simples de uma variável real), além de algumas técnicas e aplicações variadas. O objetivo não era apenas que os estudantes conhecessem um pouco do que é o cálculo, mas que aprendessem a usá-lo, e com segurança. No segundo texto - "Um curso básico de matemática para estudantes de graduação em física - Parte I" (Peixoto *et al.* 2023) - introduzimos *funções de duas ou mais variáveis reais* e trabalhamos *derivadas parciais* (e tópicos relacionados, como diferencial total), *integrais múltiplas* e, em seguida, *vetores*. Neste terceiro texto - que pode ser estudado em paralelo ao segundo, pois independe dele[1] - continuaremos nosso estudo de cálculo com funções reais de uma variável real, a partir do ponto em que paramos no primeiro texto.

Retomaremos nosso estudo de cálculo com funções reais de uma variável real na seção 2, iniciando com o importante tópico *aproximação linear local*, na subseção 2.1,[2] e logo em seguida, na subseção 2.2, introduziremos novas funções elementares em nosso estudo de cálculo - todas fundamentais para a física: funções trigonométricas e suas inversas, funções logarítmicas, funções exponenciais, e também funções hiperbólicas e suas inversas. Exploraremos, neste texto, aplicações variadas dessas funções - isoladamente ou de forma combinada.[3] Voltaremos ao tópico *aproximação linear local* na subseção 2.3, fazendo uso de funções elementares que terão sido estudadas na subseção anterior, e teremos uma breve introdução a *aproximações de ordem superior*. Por exemplo, veremos que há, partindo de $x = 0$, uma aproximação linear local para a função $\operatorname{sen} x$ - a saber, $\operatorname{sen} x \approx x$, se $|x| \ll 1$ -, mas não para a função $\cos x$; para esta, temos, partindo de $x = 0$, a seguinte aproximação quadrática: $\cos x \approx 1 - x^2/2$, se $|x| \ll 1$. E veremos que podemos melhorar a aproximação para $\operatorname{sen} x$, partindo de $x = 0$, introduzindo um termo cúbico em x: $\operatorname{sen} x \approx x - x^3/6$, se $|x| \ll 1$. E não pararemos por aí: aprenderemos a obter aproximações cada vez melhores para funções bem comportadas, usando polinômios de graus cada vez mais altos. A subseção 2.4 traz os tópicos *diferenciação implícita* e *taxas relacionadas*, que podem ser pensados como aplicações da regra da cadeia. Na subseção 2.5 estão reunidas, para consulta, fórmulas e regras para o cálculo de derivadas presentes no primeiro texto e neste terceiro texto do projeto. E na subseção 2.6 estão reunidas, também para consulta, resultados básicos relativos ao cálculo de integrais. Na subseção 2.7 você realizará atividades adicionais, algumas delas envolvendo combinações e/ou composições de funções elementares. Não consta, aqui, uma seção ou subseção intitulada "*equações diferenciais*", mas esse tema - de importância fundamental para a física - é tratado ao longo do texto, e na subseção 2.8 citaremos o que teremos visto a respeito. Apenas na Parte V desta série estudaremos equações diferenciais de modo mais formal.

Os principais resultados, em cada seção, foram postos em caixas, facilitando sua consulta.

[1] Se você já estudou o primeiro texto deste projeto (Silva & Peixoto 2020) e não tem tempo para estudar o segundo e o terceiro textos em paralelo, antes de seus estudos de mecânica newtoniana em nível universitário, dê preferência ao segundo texto.

[2] Este tópico está coberto na subseção 2.4 da Parte I desta série (o segundo texto do projeto), e aparece repetido aqui caso seja feita a opção de estudar a Parte II paralelamente à Parte I, ou mesmo antes dela - o que é perfeitamente viável. Não repetimos aqui, contudo, o conteúdo daquela subseção; trata-se apenas de uma chamada para o estudo da subseção 2.4, na Parte I.

[3] As funções hiperbólicas, e, especialmente, suas inversas, não são comumente encontradas em textos introdutórios de física, em nível universitário, mas estão presentes em textos mais avançados. Veremos alguns exemplos.

Ao final deste material didático há um apêndice com respostas para as atividades - que, lembre-se, devem ser encaradas como parte integrante do texto; assim, procure realizá-las. Há outro apêndice apresentando o sumário, para facilitar sua navegação.

Julgamos que é interessante você ter uma visão geral do que será coberto na Parte II desta série, como um todo. Este texto constitui a Parte II-A. Na Parte II-B, concluiremos nosso estudo de cálculo com funções reais de uma variável real (a menos de *séries*). De início, exploraremos vários tópicos relativos ao estudo de funções e suas aplicações. Veremos, por exemplo, como esticar, encolher, transladar e refletir gráficos de funções, e discutiremos escalas monolog e log-log, bastante usadas na física. Em seguida, apresentaremos as principais regras para o cálculo de diferenciais. Tais regras não são de fundamental importância, porque podem ser obtidas, sem muito esforço, das regras correspondentes para o cálculo de derivadas; mas, acredite, elas são muito úteis, na prática. Vejamos um exemplo. Você deve lembrar, de seu estudo de física e/ou química no ensino médio, da lei dos gases ideais: $PV = nRT$, em que P, V e T são, respectivamente, a pressão, o volume e a temperatura absoluta do gás, n é o número de mols de moléculas (ou átomos, no caso de um gás ideal monoatômico) e R é a chamada *constante universal dos gases*. Se não há troca de átomos ou moléculas entre o recipiente em que se encontra o gás e o meio externo, n é constante. Considerando P, V e T funções do tempo (mesmo que uma delas seja uma função constante), e fazendo uso da regra do produto para o cálculo de derivadas, obtemos:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(PV) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(nRT) \implies \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}V + P\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = nR\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}t}.$$

Daí, multiplicando ambos os membros desta última igualdade por dt, obtemos uma relação entre as variações infinitesimais de P, V e T, no intervalo de tempo dt:

$$P\mathrm{d}V + V\mathrm{d}P = nR\mathrm{d}T.$$

Mas não teria sido bem mais prático obter esta relação diretamente da lei dos gases ideais? Claro que sim. Um estudante, ou uma estudante, de termodinâmica deve estar apto a escrever, diretamente:

$$PV = nRT \implies P\mathrm{d}V + V\mathrm{d}P = nR\mathrm{d}T.$$

Ou seja, ele, ou ela, deve conseguir usar com facilidade a regra do produto para o cálculo de diferenciais:

$$\mathrm{d}(uv) = u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u.$$

As regras para o cálculo de diferenciais também são muito úteis durante o cálculo de certas integrais - mais um motivo para você estudá-las bem. Na sequência, estudaremos técnicas de integração: veremos as três técnicas gerais de integração - *manipulação do integrando*, *integração por substituição* e *integração por partes* -, além de técnicas mais específicas, considerando integrais de ocorrência frequente na física. Ao final da Parte II-B, retornaremos ao cálculo de limites (que foi nosso ponto de partida, no primeiro texto, lembra?), e veremos as importantes e úteis regras de l'Hospital. Veremos também como limites são definidos formalmente pelos matemáticos.

Na Parte II-C, estudaremos *séries infinitas* - um tópico de fundamental importância em toda a física. E o que é uma série infinita? É a *soma indicada* dos termos de uma sequência infinita. Veremos, por exemplo, que

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x}, \quad \text{se } |x| < 1. \tag{1}$$

Temos, no membro esquerdo desta igualdade, uma série infinita, e que *converge* para $1/(1-x)$ se $|x| < 1$; caso contrário (ou seja, se $|x| \geq 1$), dizemos que a série *diverge*, e a igualdade acima não mais se aplica. Vejamos um exemplo numérico. Com $x = 1/2$ obtemos

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 2,$$

e isto significa que podemos fazer a soma dos termos no membro esquerdo em (1) tão próxima de 2 quanto desejarmos, bastando incluirmos um número suficiente de termos. No limite em que o número de termos tende a infinito, a soma tende a 2 (e este é o sentido da igualdade acima). Mas com $x = 2$, por exemplo, temos, no membro esquerdo da igualdade (1),

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots,$$

e, obviamente, a soma vai *crescendo sem restrição*, quando vamos incluindo mais e mais termos. Dizemos então que esta série *diverge*. E observe que com $x = 2$ o membro direito da igualdade (1) fica $1/(1-2) = -1$, o que não faz o menor sentido, já que, com $x = 2$, no membro esquerdo de (1) só há termos positivos. Tudo o que veremos na Parte II-C sobre séries infinitas é de fundamental importância para a física. E saiba que há uma relação muito estreita entre séries infinitas e aproximações de ordem superior (um dos temas da subseção 2.3).

Para ter uma ideia do que será coberto nas demais partes desta série, leia a seção "Conclusão e Perspectivas" da Parte I.

O conteúdo coberto no primeiro texto deste projeto - "Um curso rápido de cálculo diferencial e integral para pré-universitários e calouros" (Silva & Peixoto 2020) - e nas Partes II-A e II-B desta série corresponde, basicamente, ao conteúdo de uma disciplina de Cálculo 1. Nosso material, contudo, difere de textos tradicionais de cálculo quanto à sequência de apresentação dos assuntos e quanto às ênfases - em especial nas atividades propostas ao longo do texto -, porque é voltado especificamente para estudantes de graduação em física (bacharelado ou licenciatura). Nosso desejo é que o material que estamos desenvolvendo possa de alguma forma contribuir para a formação desses estudantes. E ele não compete com textos tradicionais de matemática. A propósito, defendemos que é importante que os estudantes de física conheçam bem ao menos alguns dos textos tradicionais de cálculo. Incluímos uma dúzia deles nas Referências. O mais vendido no Brasil, no momento da publicação deste nosso texto, é o Stewart (Stewart *et al.* 2021); trata-se de um livro realmente muito bom, mas não é o único. Outro ótimo livro de cálculo é o Guidorizzi (Guidorizzi 2018) - talvez aquele com o maior rigor matemático, dos que selecionamos, mas, também por isso, ligeiramente mais difícil. Digamos que o Guidorizzi é particularmente recomendado para estudantes que têm uma excelente base matemática, ao nível do ensino médio, e especial apreço pelo rigor matemático - conforme é de se esperar, por exemplo, de estudantes de bacharelado em matemática.

Antes de encerrarmos esta introdução, queremos lhe pedir ajuda para divulgar este material, que é totalmente gratuito, e também o site www.paulopeixoto.net; nele você encontrará links para todos os artigos deste projeto, além de vídeos e outros materiais complementares. Desde já, agradecemos muito por sua ajuda.

2 Cálculo com funções reais de uma variável real: continuando de onde paramos

2.1 Aproximação linear local

Se você optou por estudar esta Parte II da série paralelamente à Parte I, ou mesmo antes dela (o que é totalmente viável), vá à Parte I e estude a subseção 2.4 (que não tem as subseções 2.1, 2.2 e 2.3 como pré-requisitos). Em seguida, volte aqui e comece a estudar a subseção 2.2.

2.2 Introduzindo novas funções elementares em nosso estudo de cálculo

2.2.1 Classificação geral das funções reais de uma variável real

Vamos iniciar com uma breve classificação geral das funções reais de uma variável real. Não esgotaremos este tópico: nossa exposição nem será completa, nem a mais rigorosa possível; queremos apenas lhe dar uma ideia geral dos tipos de funções com que usualmente trabalhamos em uma primeira disciplina de cálculo. Tal classificação irá ajudá-lo ou ajudá-la a se situar não só neste texto, mas em outros textos de cálculo diferencial e integral com funções reais de uma variável real.

Funções polinomiais (e casos particulares importantes)

Sejam a_0, a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_n números reais, com $a_n \neq 0$. Dizemos que

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n \quad (a_n \neq 0) \tag{2}$$

é uma *função polinomial de grau n* (ou do enésimo grau).[4] Seu domínio é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

Para evitar confusão: ao escrevermos, por exemplo, $P_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, com $a_3 \neq 0$, podemos ter em mente uma função polinomial de grau 3 *específica* ou a *família* de todas as funções polinomiais de grau 3. No primeiro caso, a_0, a_1, a_2 e a_3 (com $a_3 \neq 0$) representam valores específicos; no segundo, podem assumir qualquer valor real (exceto a_3, que não pode ser nulo - ou o polinômio não teria grau 3). É bom ter essas duas possibilidades em mente.

Há duas famílias de funções polinomiais que você certamente conhece bem: as funções polinomiais do primeiro grau e as funções polinomiais do segundo grau.

As funções polinomiais do primeiro grau,

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x \quad (a_1 \neq 0),$$

são mais conhecidas como *funções afim*, e sua notação mais comum é:[5]

$$f(x) = ax + b \quad (a \neq 0).$$

Os coeficientes a e b são conhecidos, respectivamente, como *coeficiente angular* e *coeficiente linear*. Alguns autores criticam esses nomes, mas a maioria faz uso deles. E nós, autores deste

[4]A condição $a_n \neq 0$ garante o grau n da função polinomial.

[5]Estamos trocando a_0 por b, a_1 por a e $P_1(x)$ pelo genérico $f(x)$.

texto, não vemos nenhum problema em seu uso. Discutimos brevemente seus significados geométricos - que dão origem a esses nomes - no primeiro texto deste projeto: mais especificamente na seção “A derivada como o coeficiente angular da reta tangente” (Silva & Peixoto 2020).

Constituem uma família particular de funções afim, de importância especial, as *funções lineares*:

$$f(x) = ax \quad (a \neq 0).$$

O que elas têm de especial? Possuem duas propriedades particulares bastante importantes.

A primeira delas é que se $y = f(x) = ax$ (com $a \neq 0$), as grandezas y e x têm entre si uma *relação de proporcionalidade* - ou seja, y é proporcional a x (e vice-versa). Isto significa que quando dobramos o valor de x, o valor de y é dobrado; quando triplicamos o valor de x, o valor de y é triplicado; e assim por diante. Em termos gerais: quando multiplicamos o valor de x por um fator λ qualquer, o valor de y (que é o valor de $f(x)$) é multiplicado por esse mesmo fator. Ou seja,

$$f(\lambda x) = \lambda f(x). \tag{3}$$

Veja:

$$f(\lambda x) = a(\lambda x) = \lambda(ax) = \lambda f(x).$$

A segunda propriedade particular importante das funções lineares é esta: para quaisquer números reais x_1 e x_2,

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2). \tag{4}$$

Veja:

$$f(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = f(x_1) + f(x_2).$$

As propriedades expressas em (3) e (4), reunidas, nos levam à seguinte igualdade:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2). \tag{5}$$

Veja:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \overset{\overset{\text{usando (4)}}{\downarrow}}{=} f(\lambda_1 x_1) + f(\lambda_2 x_2) \overset{\overset{\text{usando (3)}}{\downarrow}}{=} \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

E a igualdade (5), por sua vez, reúne as propriedades expressas em (3) e (4): fazendo, em (5), $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 = \lambda$ e $x_1 = x$, obtemos (3); e fazendo, em (5), $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, obtemos (4).

Agora, um pequeno aparte. Um sinônimo de “função” é “*transformação*”. (Há outros termos, como “*mapeamento*” ou, simplesmente, “*mapa*”.) No cálculo e na análise, o termo mais usado é “função”, enquanto na álgebra linear o termo mais usado é “transformação”. Porém, as transformações que tipicamente estudamos na álgebra *linear* são as transformações *lineares* - e a função linear $f(x) = ax$ é apenas um tipo particular de transformação linear: quando a transformação f é de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, e todos os escalares (como λ, em (3)) são também números reais.

Continuando nossa classificação, no caso ainda mais particular em que $a = 1$, em $f(x) = ax$, temos a chamada *função identidade*, $f(x) = x$. Levar x a x - e daí o termo “função identidade” - não parece grande coisa, mas saiba que tal função é muito usada. Por exemplo, se você estudou, em seu ensino médio, os tópicos *composição de funções* e *funções inversas*, sabe que, sendo $g(x)$ uma função inversível, e $g^{-1}(x)$ a sua inversa, temos $g^{-1}(g(x)) = x$ e $g(g^{-1}(x)) = x$; portanto, a função $f(x) = g(g^{-1}(x))$ (que também pode ser expressa como $f(x) = g^{-1}(g(x))$) é a função identidade. Faremos uso da igualdade $g(g^{-1}(x)) = x$ - ou seja, desta forma particular de expressar a função identidade - na subseção 2.2.3.

As funções polinomiais do segundo grau,

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad (a_2 \neq 0),$$

são também conhecidas como funções *quadráticas*, e sua notação mais comum é:[6]

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0).$$

Funções polinomiais do primeiro grau e funções polinomiais do segundo grau são muitas vezes chamadas, simplesmente, de *funções do primeiro grau* e *funções do segundo grau*, respectivamente. Nós aqui não vemos maiores problemas nestas abreviações, mas entendemos os que as criticam: é que funções polinomiais têm grau, mas funções, em geral, não. Assim, faz sentido falar sobre o grau de uma função polinomial, mas não sobre o grau de uma função, entende?

Perceba que toda função constante (como $f(x) = 5$) é uma função polinomial de grau zero. Mas ninguém que conhecemos chama funções constantes assim.

Funções racionais

Chamamos de *função racional* toda função que pode ser expressa como a razão $P(x)/Q(x)$ de duas funções polinomiais $P(x)$ e $Q(x)$. Assim, são exemplos de funções racionais:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 4x - 1}{x^4 - 3x}, \;\; g(x) = 3x^2 + 4x - 1, \;\; h(x) = \frac{3x^2 + 4x - 1}{x^4 - 3x} + 5x^3.$$

O primeiro exemplo dispensa comentários. No segundo, podemos pensar a função polinomial no denominador como $Q(x) = 1$ (ou $Q_0(x) = 1$, se você fizer questão de usar a notação em que o grau da função polinomial é indicado). Perceba então que *toda função polinomial é também uma função racional*. E a expressão para a função $h(x)$, no terceiro exemplo, pode ser reescrita como (verifique)

$$h(x) = \frac{5x^7 - 15x^4 + 3x^2 + 4x - 1}{x^4 - 3x};$$

ou seja, basta que a expressão que define a função possa ser reescrita como uma razão de dois polinômios.

Enquanto as funções polinomiais podem ser definidas para todo x real, as funções racionais

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

em que $P(x)$ e $Q(x)$ são funções polinomiais, só podem ser definidas para valores de x que não anulam $Q(x)$. Por exemplo, as funções $f(x)$ e $h(x)$, acima, não estão definidas para $x = 0$, nem para $x = \sqrt[3]{3}$ (verifique).

Constituem uma família particular de funções racionais, de importância especial, as funções

$$f(x) = \frac{a}{x} \quad (a \neq 0),$$

definidas para $x \neq 0$. Se $y = f(x) = a/x$ (com $a \neq 0$), dizemos que as grandezas y e x têm entre si uma *relação de proporcionalidade inversa* - ou seja, y é inversamente proporcional a x (e

[6] Estamos trocando a_0 por c, a_1 por b, a_2 por a e $P_2(x)$ pelo genérico $f(x)$.

vice-versa). Isto significa que quando dobramos o valor de x, o valor de y cai à metade; quando triplicamos o valor de x, o valor de y cai a um terço; e assim por diante. Em termos gerais: quando multiplicamos o valor de x por um fator λ não nulo qualquer, o valor de y (que é o valor de $f(x)$) é dividido por λ. Ou seja,

$$f(\lambda x) = \frac{f(x)}{\lambda} \quad (\lambda \neq 0). \tag{6}$$

Veja: com $\lambda \neq 0$ (e, é claro, também com $x \neq 0$) temos

$$f(\lambda x) = \frac{a}{\lambda x} = \frac{1}{\lambda}\frac{a}{x} = \frac{1}{\lambda} f(x) = \frac{f(x)}{\lambda}.$$

No caso ainda mais particular em que $a = 1$, em $f(x) = a/x$, temos a chamada *função recíproca*, $f(x) = 1/x$. Um exemplo de aplicação desta função: a *curvatura* κ de uma circunferência é definida como o recíproco de seu raio R:

$$\kappa \equiv \frac{1}{R}.$$

Para ver que a expressão "curvatura", usada para $\kappa \equiv 1/R$, faz sentido, considere um arco de circunferência de comprimento *s fixo*, em uma circunferência de raio R (com $s < 2\pi R$, é claro). Então perceba que aumentando o raio R da circunferência, o arco de comprimento s fixo vai ficando cada vez menos curvo, ao ponto de se confundir com um segmento de reta para R suficientemente grande. Quando R tende a infinito, o arco de comprimento s fixo tende a um segmento de reta de comprimento s, e κ tende a zero. Portanto, podemos dizer que todo segmento de reta tem curvatura nula. Faz todo sentido, não acha?

Uma observação final, antes de encerrarmos este tópico. A *lei de Newton da gravitação* nos diz - entre outras coisas - que a força com que se atraem duas partículas de massas m_1 e m_2, a uma distância r uma da outra, tem intensidade F dada por

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

em que G é uma constante fundamental da física denominada *constante gravitacional* (seu valor no Sistema Internacional de Unidades é de aproximadamente $6{,}67 \times 10^{-11}\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{kg}^2$). Perceba que F não é inversamente proporcional a r; dizemos que F é inversamente proporcional a r^2. Uma forma de ver isso é introduzindo uma nova variável: $u \equiv r^2$. Obtemos:

$$F = \frac{G m_1 m_2}{u},$$

e, não resta dúvida, F é inversamente proporcional a u. Trocando u por r^2 nesta última afirmativa, dizemos então que F é inversamente proporcional a r^2. Assim, por exemplo, ao dobrarmos r^2, F cai à metade. Mas para dobrarmos r^2, o valor de r deve ser multiplicado por $\sqrt{2}$ (verifique).

Funções algébricas

Chamamos de *função algébrica* toda função de x que pode ser dada a partir de uma *expressão algébrica* na variável x envolvendo apenas um número *finito* de operações de *adição*, *subtração*, *multiplicação*, *divisão* e/ou *potenciação*[7], mas com a seguinte restrição: não é permitida a

[7] Não incluímos *radiciação* na lista porque em geral convém pensá-la, no cálculo, como um caso particular da potenciação. Por exemplo, $\sqrt[3]{3x^2+1} = (3x^2+1)^{1/3}$, e fazendo uso da regra da potência (combinada com outras regras, como a regra da cadeia) obtemos: $[\sqrt[3]{3x^2+1}]' = [(3x^2+1)^{1/3}]' = \frac{1}{3}(3x^2+1)^{(1/3)-1} \cdot 6x = 2x(3x^2+1)^{-2/3}$.

presença, em expoentes, da variável x, nem de números irracionais (como π, $\sqrt{2}$ etc.). Assim, são exemplos de funções algébricas[8]

$$f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 1, \quad g(x) = \frac{5x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 + 4x} \quad , \quad h(x) = \frac{5x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 + 4\sqrt{x}} \quad \text{e} \quad s(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{3/2},$$

mas não são funções algébricas, por exemplo,[9]

$$\tilde{f}(x) = x^{\pi}, \quad \tilde{g}(x) = 2^x, \quad \tilde{h}(x) = x^x \quad \text{e} \quad \tilde{s}(x) = 5^{-x^2}.$$

Perceba que *toda função racional é também uma função algébrica*. Com o que vimos até aqui, podemos construir o diagrama apresentado na Fig. 1.

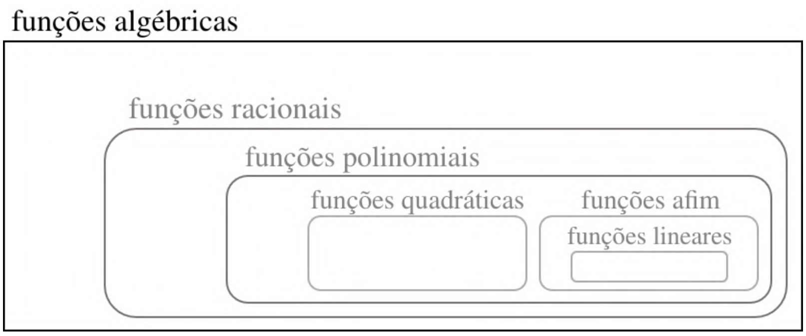


Figura 1: Casos particulares importantes de funções algébricas.

Não sabemos se você percebeu, mas com o que aprendemos sobre cálculo de derivadas no primeiro texto deste projeto (Silva & Peixoto 2020) - o que inclui a regra da cadeia -, estamos aptos a calcular derivadas de *todas* as funções algébricas. Mas só. Ainda não aprendemos a calcular derivadas de funções como $\tilde{f}(x) = x^{\pi}$ e $\tilde{g}(x) = 2^x$. Você arrisca um palpite para as derivadas destas duas funções? Pense um pouco, antes de passar para o próximo parágrafo.

Se você arriscou $\tilde{f}'(x) = \pi x^{\pi-1}$, aplicando a regra da potência, acertou. Mas lembre-se que ainda não demonstramos a regra da potência para expoentes irracionais; só até expoentes racionais (Silva & Peixoto 2020). Faremos a demonstração da regra da potência para expoentes reais (que incluem, portanto, os irracionais) neste texto - mais especificamente na subseção 2.4. Agora, se você arriscou $\tilde{g}'(x) = x2^{x-1}$, errou: é que a regra da potência não se aplica quando temos x no expoente. Aliás, devemos estar atentos para não aplicarmos erroneamente uma regra a um caso ao qual ela não se aplica. Em todas as demonstrações que estudamos para a regra da potência no primeiro texto (Silva & Peixoto 2020), jamais houve variável no expoente: começamos com os expoentes $n = 1, 2, 3$, depois estendemos para todos os naturais não nulos, daí incluímos os inteiros negativos e, por fim, passamos para os racionais. Mostraremos, na subseção 2.2.5, que $[2^x]' = 2^x \ln 2$, que é um resultado bem diferente de $x2^{x-1}$, não é?

[8]Perceba que a função $h(x)$ não está definida para $x \leq 0$. Fica como tarefa para você mostrar que a função $s(x)$ só está definida para $x \geq 1$ ou $x < -1$. (Dica: talvez você precise revisar o tópico *inequações quociente*, observando que, devido ao expoente $3/2$, a razão $(x-1)/(x+1)$ deve ser não negativa.)

[9]Dificilmente uma determinada classificação é universalmente aceita. Não estranhe se algum autor considerar que uma função como $\tilde{f}(x) = x^{\pi}$, que tem um número irracional (mas não a variável x) em um expoente, é algébrica.

Funções elementares

As funções algébricas pertencem a um conjunto mais amplo de *funções elementares*. Completam esse conjunto - além de funções do tipo $f(x) = x^\pi$, em que há números irracionais em expoentes:

(1) as *funções trigonométricas*[10]

$$\operatorname{sen} x, \ \cos x, \ \operatorname{tg} x, \ \sec x, \ \operatorname{cossec} x, \ \operatorname{cotg} x$$

e suas inversas - sendo

$$\operatorname{arcsen} x, \ \arccos x \ \text{ e } \ \operatorname{arctg} x$$

as três primeiras, respectivamente;

(2) as *funções exponenciais*

$$b^x, \quad \text{com } 0 < b \neq 1 \text{ e } x \in \mathbb{R},$$

e as *funções logarítmicas*

$$\log_b x, \quad \text{com } 0 < b \neq 1 \text{ e } x > 0$$

(sendo b^x e $\log_b x$ funções inversas, uma da outra);[11]

(3) as combinações e/ou composições que podemos realizar com duas ou mais funções elementares quaisquer.[12] Algumas delas recebem atenção especial, e têm até nomes próprios, como é o caso das *funções hiperbólicas*

$$\operatorname{senh} x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad (\textit{seno hiperbólico de } x),$$

$$\cosh x \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad (\textit{cosseno hiperbólico de } x),$$

$$\operatorname{tgh} x \equiv \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad (\textit{tangente hiperbólica de } x),$$

em que e é o número irracional chamado "*número de Euler*" (seu valor aproximado é 2,71828, como veremos na subseção 2.2.5).

Neste texto introduziremos, em nosso estudo de cálculo, cada uma das funções elementares citadas acima. A propósito, estas funções elementares não algébricas são também conhecidas como *funções elementares transcendentes*, ou simplesmente, *funções transcendentes*.

Funções não elementares

Toda função real de uma variável real que não é uma função elementar (lembrando que combinações e composições de funções elementares são também funções elementares) é denominada *função não elementar*.

[10] As funções trigonométricas têm uma importante característica, não encontrada em funções algébricas: são *periódicas*.

[11] Na Parte V desta série obteremos a importante *fórmula de Euler* (válida para todo número real θ): $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, em que i é a *unidade imaginária*, que satisfaz a igualdade $i^2 = -1$, e e é o número irracional chamado "*número de Euler*". Essa fórmula nos diz - surpreendentemente - que com o uso de números complexos podemos relacionar funções exponenciais (complexas) e funções trigonométricas (reais).

[12] Exemplo de *composição* de duas funções: com $f(x) = x^2 - x$ e $g(x) = 3x + 1$, temos $p(x) \equiv f(g(x)) = (3x+1)^2 - (3x+1)$. Exemplo de *combinação* de duas funções: com as mesmas funções $f(x)$ e $g(x)$, temos $q(x) = f(x)g(x) = (x^2 - x)(3x+1)$.

Um exemplo de função não elementar é a *função erro*, $\operatorname{erf}(x)$, que tem aplicações em *probabilidade*, *estatística* e *equações diferenciais*, e é definida como

$$\operatorname{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}t.$$

Entenda que o integrando, $f(t) = e^{-t^2}$, é uma função elementar de t (que pode ser obtida a partir da composição de $g(t) = e^t$ e $h(t) = -t^2$: $f(t) = g(h(t))$), mas ela não possui antiderivada que possa ser expressa em termos de funções elementares. Assim, não existe uma *forma fechada* para a integral acima; ou seja, tal integral não pode ser calculada - a não ser *numericamente*. Faremos isso na Parte III desta série, em que estudaremos um pouco de *cálculo numérico*. Realizando uma *integração numérica* obteremos, por exemplo, $\operatorname{erf}(1) \approx 0,8427$. E mostraremos, na Parte IV desta série, que

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{erf}(x) = 1.$$

Dá pra enxergar, aceitando (por enquanto) este resultado, que o fator $2/\sqrt{\pi}$ foi introduzido, na definição da função erro, para que ela tendesse a 1 quando x tende a infinito. De fato, mostraremos na Parte IV desta série que a integral acima tende a $\sqrt{\pi}/2$ quando x tende a infinito.

Outro exemplo de função não elementar é a *função W de Lambert*, que será introduzida e aplicada à física ao final da Parte II-C desta série.

Muito bem, vamos complementar o diagrama apresentado na Fig. 1, ampliando-o para o diagrama na Fig. 2. Consulte as Figs. 1 e 2 sempre que precisar revisar a classificação geral apresentada aqui das funções reais de uma variável real.

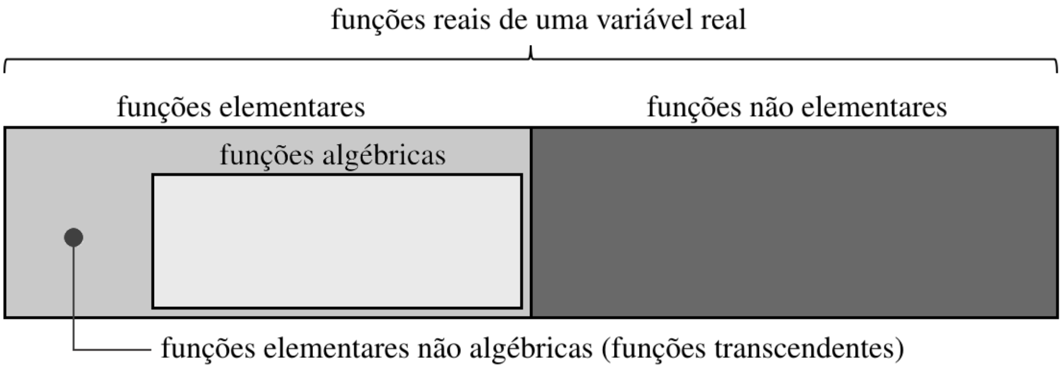


Figura 2: Classificação geral das funções reis de uma variável real (complemente com o diagrama apresentado na Fig. 1).

2.2.2 Cálculo com funções trigonométricas

Estamos considerando, aqui, que você aprendeu bem trigonometria ao nível do ensino médio - e não só *trigonometria no triângulo retângulo*, mas também *trigonometria na circunferência trigonométrica* (onde definimos funções como $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ e $\operatorname{tg} x$ para todo x real). Se não é o caso, e você está em uma graduação em física ou em área afim, há uma lacuna grave em sua formação matemática ao nível do ensino médio. Então faça uma pausa de ao menos uma semana ou duas (talvez mais) em seu estudo deste texto e se dedique a um estudo intensivo desses assuntos, incluindo a resolução de muitos exercícios.

Vamos começar calculando a derivada da função $f(x) = \operatorname{sen} x$. Esse cálculo servirá de base para obtermos as derivadas das demais funções trigonométricas.

Partindo da definição de derivada,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

obtemos, com $f(x) = \operatorname{sen} x$:

$$[\operatorname{sen} x]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+\Delta x) - \operatorname{sen} x}{\Delta x}.$$

Usando a identidade para o seno da soma,[13]

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a,$$

obtemos

$$[\operatorname{sen} x]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \, \cos \Delta x + \operatorname{sen} \Delta x \, \cos x - \operatorname{sen} x}{\Delta x},$$

que podemos reescrever, com algumas manipulações simples, como

$$[\operatorname{sen} x]' = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} \cos x + \operatorname{sen} x \, \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} \cos x - \operatorname{sen} x \, \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x} \right).$$

Fazendo uso de propriedades básicas de limites (que são bastante intuitivas - veja o primeiro texto deste projeto (Silva & Peixoto 2020)), obtemos:

$$[\operatorname{sen} x]' = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} \right) \cos x - \operatorname{sen} x \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x} \right). \tag{7}$$

Obteremos estes dois limites através de uma análise puramente geométrica.

Provisoriamente, usaremos θ no lugar de Δx. Esta mudança não é realmente necessária, mas é incomum denotarmos ângulos por Δx. Queremos, então, calcular

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} \quad \text{e} \quad \lim_{\theta \to 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta}.$$

Vamos começar revisando a definição de *medida angular em radianos*. A Fig. 3 ilustra dois arcos de circunferência, de comprimentos s e s', sendo R e R', respectivamente, os raios das circunferências correspondentes. O que esses arcos têm em comum? Correspondem a uma mesma fração de sua circunferência - digamos, um oitavo de circunferência. Ou seja,

$$\frac{s}{C} = \frac{s'}{C'}.$$

Como $C = 2\pi R$ e $C' = 2\pi R'$ (lembrando que o número π é definido como a razão entre o comprimento de uma circunferência qualquer e seu diâmetro), obtemos:

$$\frac{s}{C} = \frac{s'}{C'} \implies \frac{s}{\cancel{2\pi} R} = \frac{s'}{\cancel{2\pi} R'} \implies \frac{s}{R} = \frac{s'}{R'}.$$

Podemos, então, usar a razão s/R para medir o ângulo θ na Fig. 3 (ou seja, para medir aquela *abertura angular*):

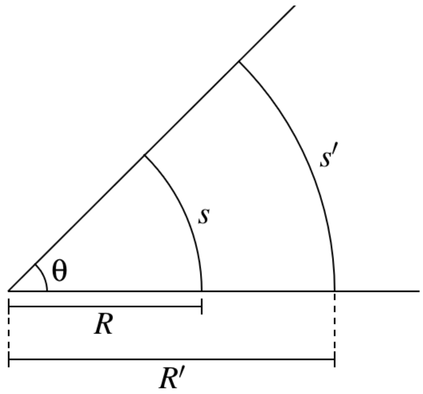
$$\theta \equiv \frac{s}{R} = \frac{s'}{R'}. \tag{8}$$

[13] A demonstração desta identidade consta em livros de matemática do ensino médio. Revise, se necessário.

No caso particular de uma volta completa, temos

$$\theta = \frac{s}{R} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi.$$

É daqui que vem a associação $360^{\mathrm{o}} \leftrightarrow 2\pi$.[14] Perceba que θ, definido em (8), é *adimensional* - afinal, estamos dividindo um comprimento por outro. Então devemos escrever, por exemplo, $\theta = \pi/6$, em vez de $\theta = \pi/6$ rad. Não existe a unidade rad (ou radiano), entende? No máximo, trata-se de um lembrete da forma como estamos medindo aquele ângulo. Mas sugerimos que você se acostume a não usá-lo.



$$\theta \equiv \frac{s}{R} = \frac{s'}{R'}$$

Figura 3: Medida angular em radianos.

No caso particular importante em que a circunferência tem raio $R = 1$ (1 metro, 1 centímetro, 1 milímetro, não importa), θ é *numericamente igual a s*. Por exemplo, no caso de meia volta temos, com $R = 1\,\mathrm{cm}$:

$$s = \pi R = \pi \cdot 1\,\mathrm{cm} = \pi\,\mathrm{cm}$$

e, portanto,

$$\theta = \frac{s}{R} = \frac{\pi\,\mathrm{cm}}{1\,\mathrm{cm}} = \pi.$$

Muito bem, passemos à circunferência trigonométrica, que tem raio unitário - sendo o valor de θ, portanto, numericamente igual ao comprimento do arco correspondente, como está indicado na Fig. 4a. Nesta mesma figura, o valor de $\operatorname{sen}\theta$ (com $\theta > 0$) é numericamente igual ao comprimento da linha vertical tracejada, e a diferença $1 - \cos\theta$ também está indicada. Está claro, na Fig. 4a, que $\operatorname{sen}\theta < \theta$, mas, como sugere a Fig. 4b, em que temos $\theta \ll 1$ (ou seja, em que o comprimento do arco é bem menor que o valor do raio),

$$\operatorname{sen}\theta \approx \theta, \quad \text{se } \theta \ll 1. \tag{9}$$

Uma análise cuidadosa da Fig. 4 nos leva então a concluir que

$$\text{a razão } \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \text{ tende a 1 quando } \theta \text{ tende a 0 pela direita.} \tag{10}$$

Ou seja, $\operatorname{sen}\theta$ e θ *se confundem cada vez mais*, quando θ tende a zero, e de um modo que sua razão tende a 1.[15] Se você está com dificuldade de enxergar isso na Fig. 4b, procure

[14] É interessante observar que poderíamos ter definido θ como a razão s/C. Neste caso, teríamos a associação $360^{\mathrm{o}} \leftrightarrow 1$.

[15] É interessante observar, por exemplo, que quando x tende a zero, $2x^2 + x^3$ e x^2 tendem, ambos, a zero, mas a razão $(2x^2 + x^3)/x^2$ tende a 2, não a 1. Estamos tentando convencê-lo ou convencê-la de que a razão $(\operatorname{sen}\theta)/\theta$ tende a 1 através de argumentos geométricos.

visualizar nesta figura que quando θ tende a zero o arco de circunferência que corresponde ao ângulo θ vai se confundindo com um *segmento de reta* de “comprimento” θ (esquecendo a unidade de comprimento), e que esse segmento vai se confundindo com o segmento vertical cujo “comprimento” é $\operatorname{sen}\theta$.

Continuando, perceba que[16]

$$\text{a razão } \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \text{ também tende a 1 quando } \theta \text{ tende a 0 pela esquerda.} \tag{11}$$

É que com $\theta < 0$ (que é quando o ângulo θ é medido no sentido horário, a partir do eixo horizontal na Fig. 4), temos $\operatorname{sen}\theta < 0$,[17] e, portanto, a razão $(\operatorname{sen}\theta)/\theta$ permanece positiva. Reunindo as afirmativas em (10) e (11), podemos concluir que

$$\boxed{\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1.} \tag{12}$$

Adicionalmente, perceba que a aproximação em (9) também é válida para valores negativos de θ, desde que tenhamos $|\theta| \ll 1$. Temos, então, este resultado que praticamente todo físico e toda física conhece (por seu uso, por exemplo, na análise de *pequenas oscilações* de um pêndulo simples):

$$\boxed{\operatorname{sen}\theta \approx \theta, \quad \text{se } |\theta| \ll 1.} \tag{13}$$

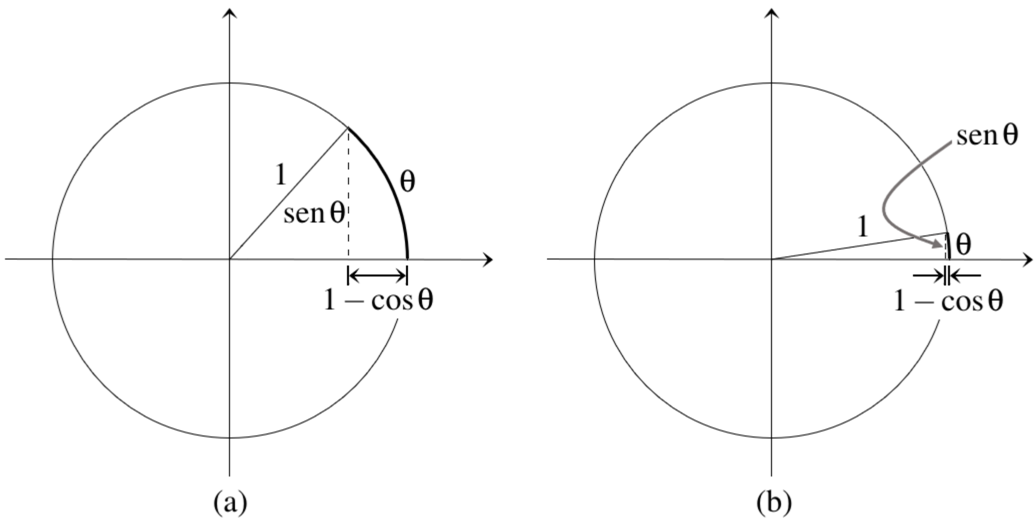


Figura 4: Construção geométrica que nos leva à obtenção dos limites expressos em (12) e (14).

A Fig. 4 também nos permite concluir que

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} = 0. \tag{14}$$

Podemos enxergar isso observando, como fizemos, que com $\theta \ll 1$ o arco de circunferência que corresponde ao ângulo θ (veja a Fig. 4b) se confunde com um segmento de reta de “comprimento”

[16]Estamos supondo que você conhece expressões como “tender a zero pela esquerda” e “tender a zero pela direita”. “Esquerda” e “direita”, aqui, se referem à reta real; não tem nada a ver com a Fig. 4. Veja o Exemplo 1 da seção *Limites de funções - uma introdução*, no primeiro texto deste projeto (Silva & Peixoto 2020).

[17]Para os que amam rigor: é claro que estamos considerando menos de meia volta, ao dizermos que com $\theta < 0$ temos $\operatorname{sen}\theta < 0$. Para $\theta = -3\pi/2$, por exemplo, $\operatorname{sen}\theta$ é positivo.

θ, e que $1-\cos\theta$ é o valor de sua projeção horizontal. Assim, quando θ tende a 0 pela direita, a razão entre o valor dessa projeção horizontal e o tamanho do segmento tende a zero, percebe? Afinal, a direção do segmento vai tendendo à direção vertical. Chegamos à mesma conclusão fazendo θ tender a 0 pela esquerda, e daí a igualdade (14).

Pois bem, voltando a usar Δx no lugar de θ, podemos reescrever os resultados em (12) e (14) respectivamente como

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\Delta x}{\Delta x}=1 \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1-\cos\Delta x}{\Delta x}=0. \tag{15}$$

Substituindo (15) em (7) obtemos, finalmente, a derivada de $\operatorname{sen}x$:

$$[\operatorname{sen}x]'=\cos x. \tag{16}$$

Pausa para uma pequena história.

Certa vez um excelente professor de Cálculo I mostrou, de forma didática e elegante, que a derivada de $\operatorname{sen}x$ é $\cos x$. Tendo enchido a lousa com desenhos e cálculos, e olhado satisfeito para a turma, um estudante que estava ao lado de um dos autores deste texto (PP) - então um calouro - falou para outro: “tudo isso para dizer que a derivada do seno é o cosseno?!”.

Isso dá uma boa conversa. Se você estuda matemática com satisfação, talvez se perguntasse, se presenciasse um comentário assim, em sua aula de Cálculo I (entendendo que o professor não quis apenas “dizer” que a derivada de $\operatorname{sen}x$ é $\cos x$): o que esses caras estão fazendo aqui? Se é o caso, concordamos parcialmente com você, mas queremos convidá-lo ou convidá-la a ser um pouco mais tolerante, e entender que nem todos têm o mesmo encantamento com a matemática. A pergunta que deixamos, para a sua reflexão, é: existe um ponto, considerando uma escala ascendente de rigor matemático, em que seu encantamento começa a diminuir? Por outro lado, se você, como aqueles estudantes, se interessa mais pelos resultados, também o convidamos, ou a convidamos, a refletir sobre o quanto você perde - não só em termos de conhecimentos gerais, mas quanto ao desenvolvimento de habilidades importantes - ao evitar elaborações como a que nos levou, acima, à igualdade (16). A propósito, frequentemente os físicos precisam criar matemática para avançar em sua tentativa de compreensão de certos fenômenos. Foi assim com Newton - que divide com Leibniz a autoria do cálculo diferencial e integral - e é assim ainda hoje. É claro, nem todos os físicos se envolvem (nem precisam se envolver) com matemática a esse nível; trata-se de uma minoria, na verdade. Mas dificilmente você encontrará alguém com boa formação em física que nunca se interessou por estudar bem ao menos certos desenvolvimentos matemáticos, porque a matemática não é, simplesmente, uma linguagem pronta e acabada através da qual a física se expressa: retire a matemática de certos desenvolvimentos físicos, e a física vai embora junto.

Atividade 2-1: Como já sabemos que $[\operatorname{sen}x]'=\cos x$, talvez a forma mais simples de obtermos a derivada de $\cos x$ seja derivando ambos os membros da igualdade $\cos x=\operatorname{sen}(x+\pi/2)$.[18] Faça isto. Você obterá

$$[\cos x]'=-\operatorname{sen}x. \tag{17}$$

(Você precisará fazer uso da regra da cadeia (Silva & Peixoto 2020), e também da igualdade $\cos(x+\pi/2)=-\operatorname{sen}x$, que pode ser obtida de forma direta com o auxílio da circunferência

[18] A igualdade $\cos x=\operatorname{sen}(x+\pi/2)$ (ou $\cos\theta=\operatorname{sen}(\theta+\pi/2)$, se você preferir) pode ser obtida de forma direta com o auxílio da circunferência trigonométrica. Trata-se, também, de um caso particular da identidade $\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen}a\cos b+\operatorname{sen}b\cos a$: com $a=x$ e $b=\pi/2$ - verifique.

trigonométrica, ou como um caso particular da identidade $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$: com $a = x$ e $b = \pi/2$.)

Atividade 2-2: Partindo das definições

$$\boxed{\operatorname{tg} x \equiv \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad \sec x \equiv \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cossec} x \equiv \frac{1}{\operatorname{sen} x} \quad \text{e} \quad \operatorname{cotg} x \equiv \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x},} \tag{18}$$

para as funções *tangente*, *secante*, *cossecante* e *cotangente*, respectivamente, e fazendo uso de regras básicas para o cálculo de derivadas, obtenha:

$$[\operatorname{tg} x]' = \sec^2 x, \tag{19}$$

$$[\sec x]' = \sec x \ \operatorname{tg} x, \tag{20}$$

$$[\operatorname{cossec} x]' = -\operatorname{cossec} x \ \operatorname{cotg} x, \tag{21}$$

$$[\operatorname{cotg} x]' = -\operatorname{cossec}^2 x. \tag{22}$$

(Obs.: você precisará usar a identidade trigonométrica $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.)

A Tabela 1 reúne as derivadas de todas as funções trigonométricas.

$[\operatorname{sen} x]' = \cos x$	$[\sec x]' = \sec x \ \operatorname{tg} x$
$[\cos x]' = -\operatorname{sen} x$	$[\operatorname{cossec} x]' = -\operatorname{cossec} x \ \operatorname{cotg} x$
$[\operatorname{tg} x]' = \sec^2 x$	$[\operatorname{cotg} x]' = -\operatorname{cossec}^2 x$

Tabela 1: Derivadas das funções trigonométricas (lembrando que $\sec x \equiv 1/\cos x$, $\operatorname{cossec} x \equiv 1/\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{cotg} x \equiv 1/\operatorname{tg} x$). Perceba que há um sinal de menos nas expressões para as derivadas das funções cujos nomes começam com "co".

Atividade 2-3: a) À mão livre (visualizando o que ocorre na circunferência trigonométrica) ou usando um aplicativo como o Geogebra, trace os gráficos de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ no mesmo sistema de coordenadas, e observe que o gráfico de $\cos x$ está de acordo com o que se espera para a derivada de $\operatorname{sen} x$ - interpretada como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $\operatorname{sen} x$. Por exemplo, observe que quando $\operatorname{sen} x$ é máximo ou mínimo, $\cos x$ é nulo, e que quando a reta tangente ao gráfico de $\operatorname{sen} x$ tem inclinação máxima, $\cos x$ é máximo.
b) Agora, usando um aplicativo como o Geogebra, trace, no mesmo sistema de coordenadas, os gráficos dos seguintes pares de funções - um par de cada vez (veja a Tabela 1): $\cos x$ e $-\operatorname{sen} x$; $\operatorname{tg} x$ e $\sec^2 x$; $\sec x$ e $\sec x \ \operatorname{tg} x$; $\operatorname{cossec} x$ e $-\operatorname{cossec} x \ \operatorname{cotg} x$; $\operatorname{cotg} x$ e $-\operatorname{cossec}^2 x$. Para cada par, observe que o gráfico da segunda função está de acordo com o que se espera para a derivada da primeira função. (Aproveite esta atividade para revisar bem os gráficos das funções trigonométricas.)

Atividade 2-4: Mostre que

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \cos x = -\cos x. \tag{23}$$

Ou seja, derivando $\operatorname{sen} x$ ou $\cos x$ duas vezes, obtemos a função inicial multiplicada por -1. Guarde isso na memória (você entenderá logo adiante por que estamos fazendo esta recomendação).

Atividade 2-5: Calcule as derivadas das funções abaixo.[19]

a) $f(x) = A\cos(ax+b)$	**b)** $f(x) = 2\,\text{sen}\,x\cos x$	**c)** $f(x) = \text{sen}(2x)$
d) $f(x) = x\,\text{sen}\,x + \cos x$	**e)** $f(x) = x^2\cos x$	**f)** $f(x) = \text{sen}(x^3)$

Atividade 2-6: Se uma partícula se move apenas ao longo do eixo x, e sua posição varia com o tempo t segundo

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta),$$

em que A, ω e δ são constantes - as duas primeiras positivas e a última podendo ser positiva, negativa ou nula -, dizemos que o movimento dessa partícula é um *movimento harmônico simples* (MHS).

a) Observe que com o passar do tempo o argumento da função cosseno, $\omega t + \delta$, chamado de *fase*, aumenta, e com isso o valor de $\cos(\omega t + \delta)$ oscila entre -1 e 1. Daí, $x(t)$ oscila entre $-A$ e A. Por isso a constante A, que tem unidade de comprimento (afinal, x e A têm a mesma unidade), é chamada de *amplitude* do MHS. A constante δ é chamada de *constante de fase* (afinal, é o termo constante da fase) ou de *fase inicial* (porque é a fase para $t = 0$). Teria o valor de δ, para um dado MHS, a ver com o momento em que o observador escolhe para “zerar o cronômetro”? Justifique sua resposta.

b) Agora, vamos dar significado físico à constante ω. A função $\cos\theta$ tem período 2π, como você deve saber. Assim, o movimento descrito pela função $x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$ é periódico, e se repete integralmente - a partir de um instante t qualquer - após o intervalo de tempo $\Delta t = T$ - chamado de *período* do MHS - em que a variação da fase é de 2π, concorda? Partindo então da igualdade

$$\Delta(\omega t + \delta) = 2\pi,$$

mostre que o período do MHS é

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Assim, dada a constante ω (por exemplo, $\omega = 4\pi\ \text{s}^{-1}$), segue da igualdade acima o período T do MHS (no exemplo, $T = 2\pi/(4\pi\,\text{s}^{-1}) = 0{,}5\,\text{s}$). E, dado o período T do MHS, temos

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Como o período T e a frequência f de um movimento periódico (não necessariamente um MHS) estão relacionados pela igualdade[20]

$$f = \frac{1}{T},$$

temos

$$\omega = 2\pi f,$$

e por isso a constante ω é chamada de *frequência angular*: trata-se, simplesmente, da frequência f do movimento, multiplicada por 2π.

c) Calcule

$$v_x(t) \equiv \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}.$$

[19] Observe que as funções nos itens b e c são iguais, pois $\text{sen}(2x) = 2\,\text{sen}\,x\cos x$ (faça $a = b = x$ na identidade $\text{sen}(a+b) = \text{sen}\,a\cos b + \text{sen}\,b\cos a$). Consequentemente, suas derivadas também são iguais. Verifique isso usando, após o cálculo de $f'(x)$ nos itens b e c, a identidade $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b$.

[20] Observe que se em um intervalo de tempo Δt são completados n ciclos, temos $T = \Delta t/n$ e $f = n/\Delta t$ - e daí a relação $f = 1/T$.

d) Calcule
$$a_x(t) \equiv \frac{\mathrm{d}v_x(t)}{\mathrm{d}t}.$$
e) Mostre que
$$a_x = -\omega^2 x.$$
f) Aplicando a segunda lei de Newton a essa partícula, de massa m, mostre que a força resultante sobre ela (que tem a direção do eixo x, já que a partícula se move apenas ao longo desse eixo) tem componente x dada por
$$F_{\text{res}_x} = -m\omega^2 x.$$
Trata-se, portanto, da lei de força conhecida como *lei de Hooke*:[21]
$$F_{\text{res}_x} = F_x = -kx, \quad \text{com } k = m\omega^2.$$
Obtenha, então, o período do MHS em função de m e k:
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$
Vamos concluir com uma observação importante. Em $x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$, o argumento da função cosseno em geral não é uma medida angular; ou seja, em geral um movimento harmônico simples não é uma projeção de um movimento circular uniforme (que é como o MHS é comumente trabalhado em textos de física do ensino médio). Então embora tenhamos calculado a derivada de $\operatorname{sen} x$ - e a partir daí as derivadas das demais funções trigonométricas - fazendo uso de considerações geométricas, a partir de medidas angulares, devemos nos libertar da ideia de que argumentos de funções trigonométricas são necessariamente medidas angulares. Do contrário, poderemos ficar procurando ângulos em problemas em que eles simplesmente não existem, entende? Nesse sentido, talvez a melhor forma de "visualizarmos" as funções trigonométricas seja através de seus gráficos (mas ainda fazendo uso da circunferência trigonométrica para o esboço desses gráficos, ou, por exemplo, quando quisermos lembrar que $\operatorname{sen}(3\pi/2) = -1$ ou que $\cos x = \operatorname{sen}(x + \pi/2)$).

Atividade 2-7: A restrição apresentada na Atividade 2-6, de que A e ω são constantes *positivas* em $x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$, não é realmente limitante. Nesta atividade veremos por quê. Veremos também que a função seno pode ser usada no lugar da função cosseno, na expressão para $x(t)$.
a) Digamos que alguém lhe apresente a função
$$x(t) = A\cos(-\omega t + \delta),$$
com $\omega > 0$. Mostre que podemos reescrever:
$$x(t) = A\cos(\omega t - \delta),$$
deixando, assim, positiva a constante que multiplica t no argumento da função cosseno. (Dica: faça uso da identidade $\cos\theta = \cos(-\theta)$.)
b) Agora, digamos que alguém lhe apresente a função
$$x(t) = -A\cos(\omega t + \delta),$$

[21] Não se trata de uma lei fundamental da natureza. Aplica-se, por exemplo, como uma boa aproximação, quando temos um bloco sendo movido, com atrito e resistência do ar desprezíveis, por uma mola sob certas condições (como não ser, a mola, muito distendida). Neste caso, a constante k é chamada de *constante elástica da mola*. Você deve ter familiaridade com a lei de Hooke, de seus estudos de física do ensino médio.

com $A > 0$. Mostre que podemos reescrever:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta'), \quad \text{com } \delta' = \delta \pm \pi,$$

deixando, assim, positiva a constante que multiplica a função cosseno. (Dica: faça uso da identidade $-\cos\theta = \cos(\theta \pm \pi)$.)

c) Por fim, digamos que alguém lhe apresente a função

$$x(t) = A\text{sen}(\omega t + \delta);$$

ou seja, com a função seno, no lugar da função cosseno. Mostre que podemos reescrever:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta'), \quad \text{com } \delta' = \delta - \frac{\pi}{2}.$$

(Dica: faça uso da identidade $\sin\theta = \cos(\theta - \pi/2)$.)[22]

Atividade 2-8: Na Atividade 2-6 mostramos que uma partícula de massa m que realiza, no eixo x, um MHS dado por

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta), \tag{24}$$

sendo A e ω constantes *positivas* (isto não é realmente restritivo, como vimos na Atividade 2-7) e δ uma constante positiva, negativa ou nula, está sujeita a uma força resultante na direção x cuja componente x obedece à lei de Hooke - ou seja,

$$F_{\text{res}_x} = -kx, \tag{25}$$

com $k = m\omega^2$. Faremos, agora, um percurso inverso - que é o percurso padrão quando atacamos um problema de mecânica newtoniana: partiremos da expressão em (25) para a força resultante (ou melhor, para a componente x da força resultante, que neste problema tem a direção do eixo x) - sendo k uma constante *positiva* ainda não relacionada a m, nem a ω - e, fazendo uso da segunda lei de Newton, tentaremos obter a função $x(t)$. Será um bom treinamento para problemas mais complexos, como quando há uma força dissipativa cujo módulo é proporcional ao módulo da velocidade da partícula (veremos isso mais adiante).

a) Aplicando a segunda lei de Newton à partícula, na forma

$$a_x = \frac{F_{\text{res}_x}}{m},$$

obtenha a *equação diferencial*

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x. \tag{26}$$

Trata-se de uma equação cuja solução é o conjunto de todas as funções $x(t)$ que a satisfazem.

b) Analisando a Eq. (26), perceba que estamos em busca de uma função $x(t)$ cuja derivada segunda seja igual à própria função, multiplicada pela constante negativa $-k/m$. Examinando nosso repertório de funções, podemos tentar, após refletirmos um pouco:[23]

$$x(t) = A\cos\omega t, \tag{27}$$

[22]As identidades $\cos\theta = \cos(-\theta)$, $-\cos\theta = \cos(\theta \pm \pi)$ e $\sin\theta = \cos(\theta - \pi/2)$ podem ser extraídas diretamente da circunferência trigonométrica. Estas duas últimas seguem também da identidade mais geral $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b$ (verifique).

[23]Reveja a Atividade 2-4.

sendo A uma constante não nula qualquer e ω uma constante positiva qualquer.[24] Observe que erraríamos se tentássemos a função $x(t) = \cos\omega t$, pois $\cos\omega t$ é um número puro, enquanto x tem dimensão de comprimento. Precisamos, portanto, da constante A, que tem dimensão de comprimento. Também erraríamos se tentássemos $x(t) = A\cos t$, porque o argumento da função cosseno deve ser adimensional (não faz sentido, por exemplo, uma expressão como $\cos(\pi\,\text{segundos})$). Precisamos, portanto, da constante ω, que tem dimensão de inverso de tempo. Mostre que a *solução tentativa* em (27) satisfaz a equação diferencial em (26), desde que tenhamos

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{28}$$

c) Embora a solução tentativa em (27), com ω dado em (28), esteja correta, ela não constitui a *solução geral* para a equação diferencial em (26): é que temos, independentemente do valor da constante arbitrária A, $v_x = 0$ para $t = 0$ (verifique). Trata-se de uma restrição desnecessária, é claro, porque com ela estamos limitando os instantes em que o operador pode zerar o cronômetro a instantes em que a partícula está em repouso. Para obtermos a solução geral, precisamos de uma segunda constante arbitrária, e, pela análise que acabamos de fazer, a tentativa natural consiste no acréscimo de uma constante arbitrária δ ao argumento da função cosseno - e agora sim, podemos restringir os valores de A a valores positivos (reveja a Atividade 2-7):

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta), \quad \text{com } A > 0 \ \text{ e } \ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{29}$$

Sua tarefa, neste item, é mostrar que esta função satisfaz a equação diferencial em (26).

d) Neste item e no próximo, você irá mostrar que a função em (29) satisfaz as *condições iniciais*

$$x(0) = x_0 \quad \text{e} \quad v_x(0) = v_{x_0},$$

em que x_0 e v_{x_0} são valores arbitrários (positivos, negativos ou nulos) para x e v_x, respectivamente, em $t = 0$. Ou seja, sua tarefa, nestes dois itens, é obter A e δ em função de x_0 e v_{x_0}, mostrando, assim, que x_0 e v_{x_0} determinam A e δ (a menos de um múltiplo qualquer de 2π, positivo ou negativo, que podemos acrescentar a δ). Neste item, mostre que

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_{x_0}}{\omega}\right)^2}. \tag{30}$$

e) Agora vem a parte mais difícil: obter δ em função de x_0 e v_{x_0} (que podem assumir valores quaisquer - positivos, negativos ou nulos). Primeiro, mostre que

$$A\cos\delta = x_0 \quad \text{e} \quad -\omega A \operatorname{sen}\delta = v_{x_0}, \tag{31}$$

e então obtenha a seguinte igualdade:

$$\operatorname{tg}\delta = -\frac{v_{x_0}}{\omega x_0}. \tag{32}$$

Mas queremos obter δ, não $\operatorname{tg}\delta$, certo? É aqui que a dificuldade aparece.

[24]Não restringiremos, por enquanto, A a uma constante positiva. Faremos isso mais adiante, nesta atividade: quando tivermos introduzido a constante de fase δ na expressão para $x(t)$. Com ela, poderemos nos dar ao luxo de restringir os valores de A a valores positivos (reveja a Atividade 2-7). A restrição de ω a valores positivos, em (27), não é limitante, devido à identidade $\cos(-\theta) = \cos\theta$.

Vamos fazer uma pequena digressão. A Fig. 5 mostra o gráfico da função $\mathrm{tg}\,x$ (é claro, você não irá confundir este "x" com a posição da partícula em MHS). As curvas que constituem o gráfico de $\mathrm{tg}\,x$ não interceptam as linhas verticais tracejadas ilustradas na figura, mas se aproximam cada vez mais delas, sem restrição. Tais linhas são denominadas *assíntotas* (verticais).[25] Pois bem, lembrando de seu estudo de *funções inversas* no ensino médio, perceba que a função $\mathrm{tg}\,x$ não possui inversa (lembre-se do "teste da linha horizontal"). Contudo - e isso é muito bonito -, podemos restringir o domínio da função $\mathrm{tg}\,x$ para que a nova função assim obtida possua uma inversa. A escolha padrão é restringir o domínio da função $\mathrm{tg}\,x$ ao intervalo aberto $(-\pi/2, \pi/2)$. Podemos até criar uma notação para a função $\mathrm{tg}\,x$ com domínio restrito ao intervalo aberto $(-\pi/2, \pi/2)$: talvez $\mathrm{tg_r}\,x$, com "r" de "restrita". A função *arco tangente*, $\mathrm{arctg}\,x$, é a função inversa da função $\mathrm{tg_r}\,x$; ou seja,

$$\mathrm{arctg}\,x \equiv \mathrm{tg_r}^{-1}\,x. \tag{33}$$

Os gráficos de $\mathrm{tg_r}\,x$ e $\mathrm{arctg}\,x$ são apresentados na Fig. 6. (Fim da digressão.)

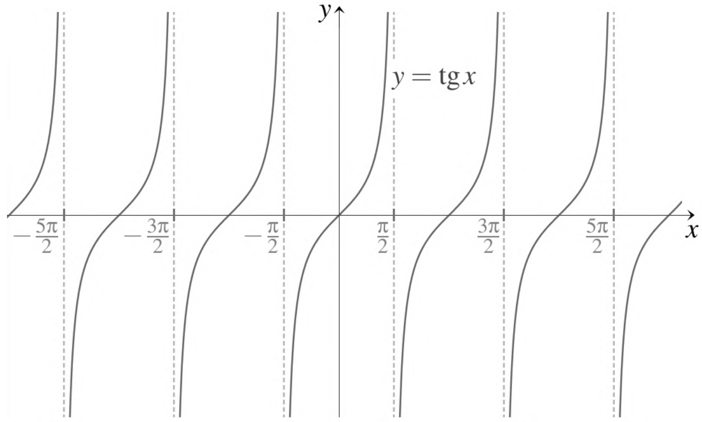


Figura 5: Gráfico da função $\mathrm{tg}\,x$.

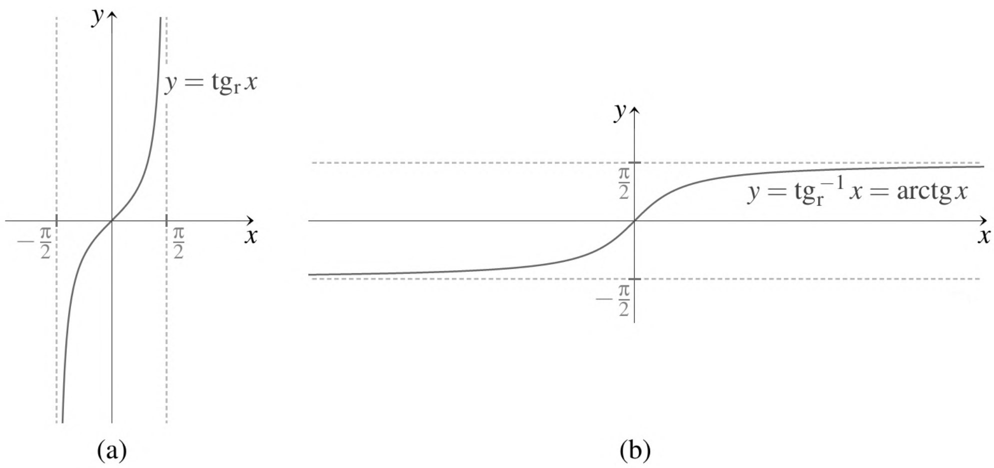


Figura 6: Gráficos **(a)** da função $\mathrm{tg}\,x$, restrita ao intervalo aberto $(-\pi/2, \pi/2)$ - aqui denotada por $\mathrm{tg_r}\,x$ -, e **(b)** de sua inversa, $\mathrm{tg_r}^{-1}\,x = \mathrm{arctg}\,x$.

Não está correto escrevermos, a partir de (32):

$$\delta = \mathrm{arctg}\left(-\frac{v_{x_0}}{\omega x_0}\right), \tag{34}$$

[25] Estudaremos assíntotas - verticais, horizontais e oblíquas - na Parte II-B desta série.

porque a função arco tangente nos fornece um valor no intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ - portanto, no quadrante 1 ou no quadrante 4 do plano cartesiano contendo a circunferência trigonométrica, ou na parte positiva do eixo das abscissas, como ilustra a Fig. 7. Observe as igualdades em (31). Perceba que os sinais de x_0 e v_{x_0} determinam em que quadrante do plano cartesiano contendo a circunferência trigonométrica está o ponto P ilustrado na Fig. 7, ou se P está sobre um dos quatro semieixos desse plano. Por exemplo, com $x_0 < 0$ e $v_{x_0} > 0$ temos $\cos\delta < 0$ e $\operatorname{sen}\delta < 0$, e, portanto, P está no terceiro quadrante do plano cartesiano contendo a circunferência trigonométrica. Com isso em mente, e escolhendo a opção de manter δ no intervalo $(-\pi, \pi]$, obtenha:

$$\delta = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(-\frac{v_{x_0}}{\omega x_0}\right) & \text{se} \quad x_0 > 0; \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se} \quad x_0 = 0 \ \text{e} \ v_{x_0} > 0; \\ \frac{\pi}{2} & \text{se} \quad x_0 = 0 \ \text{e} \ v_{x_0} < 0; \\ \operatorname{arctg}\left(-\frac{v_{x_0}}{\omega x_0}\right) - \pi & \text{se} \quad x_0 < 0 \ \text{e} \ v_{x_0} > 0; \\ \operatorname{arctg}\left(-\frac{v_{x_0}}{\omega x_0}\right) + \pi & \text{se} \quad x_0 < 0 \ \text{e} \ v_{x_0} \leq 0. \end{cases} \tag{35}$$

É claro, este resultado não está aqui para ser memorizado. Muito mais importante é você compreender o processo que o levou a ele, e, após isso, saber usá-lo. É o que você fará, no próximo item.

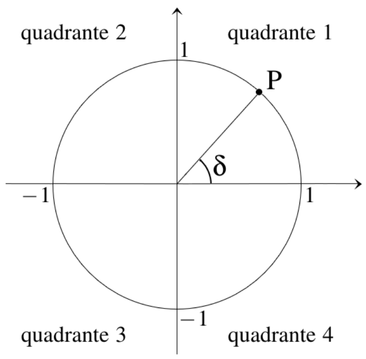


Figura 7: Com o valor de δ restrito ao intervalo aberto $(-\pi/2, \pi/2)$, o ponto P, na circunferência trigonométrica, está restrito aos quadrantes 1 e 4, ou está na parte positiva do eixo horizontal (se $\delta = 0$). Mas se δ pode assumir qualquer valor no intervalo $(-\pi, \pi]$ (entre outros intervalos possíveis, de comprimento 2π, aberto em um extremo e fechado no outro), o ponto P não tem restrição de posição na circunferência trigonométrica.

f) Vamos aplicar os resultados obtidos nos itens **d** e **e** - mais especificamente as igualdades (30) e (35) - a um exemplo numérico (faça uso de uma calculadora, e expresse A e δ com 3 algarismos significativos). Uma partícula realiza um MHS no eixo x, centrado no ponto $x = 0$. Sabendo que a frequência f do MHS é de 4,00 Hz, e que a partícula está, no instante $t = 0$, na posição $-3{,}00$ cm, com componente x de velocidade igual a 50,0 cm/s, obtenha a função horária da posição dessa partícula, $x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$, com $A > 0$ e $\omega > 0$. Após isso, fazendo uso da expressão obtida para $x(t)$, verifique que, de fato, temos (a menos de um possível erro de arredondamento, devido ao uso de 3 algarismos significativos) $x = -3{,}00$ cm e $v_x = 50{,}0$ cm/s para $t = 0$. (Perceba que a resposta teria sido incorreta com o uso da igualdade (34).)

Algumas observações importantes, antes de encerrarmos. É exatamente porque temos duas condições iniciais que precisamos de duas constantes arbitrárias na expressão para $x(t)$. E temos duas condições iniciais porque a equação diferencial em (26) é de segunda ordem: ela determina a derivada segunda de $x(t)$, mas não determina, para $t = 0$ (por exemplo), o valor de x, nem de sua derivada primeira, $v_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$. Em outras palavras: a segunda lei de Newton não determina onde a partícula está, nem que velocidade possui, no instante $t = 0$; mas se soubermos quais são a posição inicial e a velocidade inicial da partícula, em princípio conseguiremos prever, com a segunda lei de Newton, sua posição e sua velocidade para todos os demais instantes - do futuro e do passado (considerando o período em que aquele movimento se mantém). Foi o que fizemos, nesta atividade.[26]

Atividade 2-9: a) Mostre que fazendo uso da identidade $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$ podemos reescrever

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta), \quad \text{com } A > 0 \text{ e } \omega > 0, \tag{36}$$

como

$$x(t) = (A\cos\delta)\cos\omega t + (-A\operatorname{sen}\delta)\operatorname{sen}\omega t.$$

Fazendo

$$B_1 = A\cos\delta \quad \text{e} \quad B_2 = -A\operatorname{sen}\delta, \tag{37}$$

podemos, então, reescrever a expressão para $x(t)$ em (36) como

$$x(t) = B_1\cos\omega t + B_2\operatorname{sen}\omega t, \quad \text{com } B_1 \neq 0 \text{ ou } B_2 \neq 0 \text{ , e com } \omega > 0. \tag{38}$$

Ou seja, quaisquer que sejam os valores de $A > 0$ e δ, podemos sempre reescrever (36) como (38), com B_1 e B_2 obtidos através das igualdades em (37).[27] Contudo, nosso interesse maior, aqui, não está nas igualdades em (37), mas em mostrar que sempre podemos reescrever (36) como (38). Será que também podemos, sempre, reescrever (38) como (36)? Veremos no próximo item.

b) Sua tarefa neste item é mostrar que, quaisquer que sejam os valores de B_1 e B_2 em (38) - desde que não sejam ambos nulos -, podemos sempre reescrever (38) como (36). (Dica: Você poupará esforços ao perceber que não é necessário obter uma expressão explícita para δ; basta mostrar que, quaisquer que sejam os valores de B_1 e B_2 - não ambos nulos -, eles determinam o valor de A e o valor de δ - a menos de um múltiplo qualquer de 2π, positivo ou negativo, que podemos acrescentar a δ - que fazem com que a igualdade em (38) possa ser reescrita como a igualdade em (36).)

Perceba que com estes itens **a** *e* **b** *você terá mostrado que a expressão para $x(t)$ em (38) é tão válida quanto aquela em (36) para a definição de um MHS.*

c) Expresse B_1 e B_2, em (38), em termos de $x_0 \equiv x(0)$ e $v_{x_0} \equiv v_x(0)$, e então reescreva (38) fazendo uso das constantes x_0 e v_{x_0}, em vez de B_1 e B_2. Perceba, então, que x_0 e v_{x_0} determinam o MHS (lembre-se de nossa discussão a respeito de *condições iniciais* na Atividade 2-8).

d) Você pode fazer x_0 e v_{x_0} simultaneamente iguais a zero, na expressão que obteve para $x(t)$, no item **c**, e ter um MHS? Faça uma análise física, além da análise matemática óbvia.

Atividade 2-10: No primeiro texto deste projeto (Silva & Peixoto 2020) obtivemos algumas antiderivadas (ou primitivas, ou integrais indefinidas) *por inspeção* (que é uma espécie de *tentativa e erro lúcida*): usando nosso conhecimento de cálculo de derivadas (incluindo a *regra da cadeia*) conseguimos, examinando a expressão que definia uma determinada função $f(x)$,

[26] Esta atividade traz muitas informações importantes. Não passe por ela tão rapidamente, Daniel San.

[27] As igualdades em (37) nos dizem que não podemos ter B_1 e B_2 simultaneamente iguais a zero, porque $A > 0$ e não há valor de δ que torne $\cos\delta$ e $\operatorname{sen}\delta$ simultaneamente nulos. E, é claro, a própria expressão para $x(t)$ em (38) nos diz que com B_1 e B_2 simultaneamente nulos não temos um MHS. Seria impossível, então, que (36) nos levasse à expressão para $x(t)$ em (38) com B_1 e B_2 simultaneamente nulos - ou seja, a $x(t) = 0$.

obter suas antiderivadas $F(x)$ - ou seja, as funções $F(x)$ tais que $F'(x) = f(x)$. Por inspeção chegamos inclusive à importante *regra da potência para antiderivadas*:

$$\boxed{f(x) = x^n \; (n \neq -1) \implies F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,} \tag{39}$$

em que C é uma constante arbitrária.[28] Nesta atividade você obterá algumas antiderivadas envolvendo funções trigonométricas - em alguns casos de forma bem direta, em outros por inspeção, e em outros, ainda, através de certas manipulações algébricas.

a) Para começar, convença-se de que

$$\boxed{f(x) = \cos x \implies F(x) = \operatorname{sen} x + C} \tag{40}$$

e

$$\boxed{f(x) = \operatorname{sen} x \implies F(x) = -\cos x + C,} \tag{41}$$

em que C é uma constante arbitrária.

b) Fazendo uso da Tabela 1, convença-se de que

$$\boxed{f(x) = \sec^2 x \implies F(x) = \operatorname{tg} x + C,} \tag{42}$$

$$\boxed{f(x) = \sec x \operatorname{tg} x \implies F(x) = \sec x + C,} \tag{43}$$

$$\boxed{f(x) = \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x \implies F(x) = -\operatorname{cossec} x + C,} \tag{44}$$

$$\boxed{f(x) = \operatorname{cossec}^2 x \implies F(x) = -\operatorname{cotg} x + C.} \tag{45}$$

É útil observar, para uso dos resultados acima, que

$$\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \sec x \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}, \quad \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \quad \text{e} \quad \operatorname{cossec}^2 x = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x};$$

afinal, podemos estar diante, por exemplo, da expressão $(\operatorname{sen} x)/(\cos^2 x)$, em vez da expressão equivalente $\sec x \operatorname{tg} x$.[29]

c) Agora, obtenha as antiderivadas de $f(x) = A\cos(ax+b)$ e $g(x) = A\operatorname{sen}(ax+b)$.

d) Obter as antiderivadas de $f(x) = \cos^2 x$ e $g(x) = \operatorname{sen}^2 x$ é um desafio um pouco maior, e envolve uma "sacada". Primeiro, partindo da identidade trigonométrica $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$, obtenha a seguinte identidade: $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$. Em seguida, usando a identidade trigonométrica $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, mostre que podemos reescrever: $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ ou $\cos(2x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$, de onde segue, respectivamente, que (verifique)

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \tag{46}$$

[28] No primeiro texto deste projeto (Silva & Peixoto 2020) obtivemos esta regra considerando n um número *racional* diferente de -1. Trabalharemos o caso em que $n = -1$ (que não pertence a esta regra) na subseção 2.2.5, e na subseção 2.4 mostraremos que a regra em (39) e a regra correspondente para o cálculo de derivadas permanecem válidas no caso em que n é um número irracional; ou seja, mostraremos que a regra da potência - para derivadas e antiderivadas - é válida para todo expoente *real* n diferente de -1.

[29] Veremos na Parte II-B desta série a técnica de *integração por substituição*, e com ela conseguiremos obter facilmente as antiderivadas de $f(x) = \sec x \operatorname{tg} x = (\operatorname{sen} x)/(\cos^2 x)$ e $f(x) = \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x = (\cos x)/(\operatorname{sen}^2 x)$ - ou seja, sem a necessidade de memorizar os resultados em (43) e (44). São dois caminhos possíveis.

e

$$\text{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x). \tag{47}$$

Agora, fazendo uso destas duas últimas igualdades obtenha, respectivamente, as antiderivadas de $f(x) = \cos^2 x$ e $g(x) = \text{sen}^2 x$.[30]

e) Fazendo uso das igualdades (46) e (47), obtenha as antiderivadas de $f(t) = A^2 \cos^2(\omega t + \delta)$ e $g(t) = A^2 \text{sen}^2(\omega t + \delta)$, em que A, ω e δ são constantes.

Atividade 2-11: Esta atividade tem como requisito a Atividade 2-10 - mais especificamente seu item **e**. Mas antes de realizá-la, revise o Exercício 59 do primeiro texto deste projeto (Silva & Peixoto 2020). Nele, vimos que podemos expressar o valor médio de uma função $f(x)$ no intervalo $[a,b]$ como

$$\bar{f}_{[a,b]} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

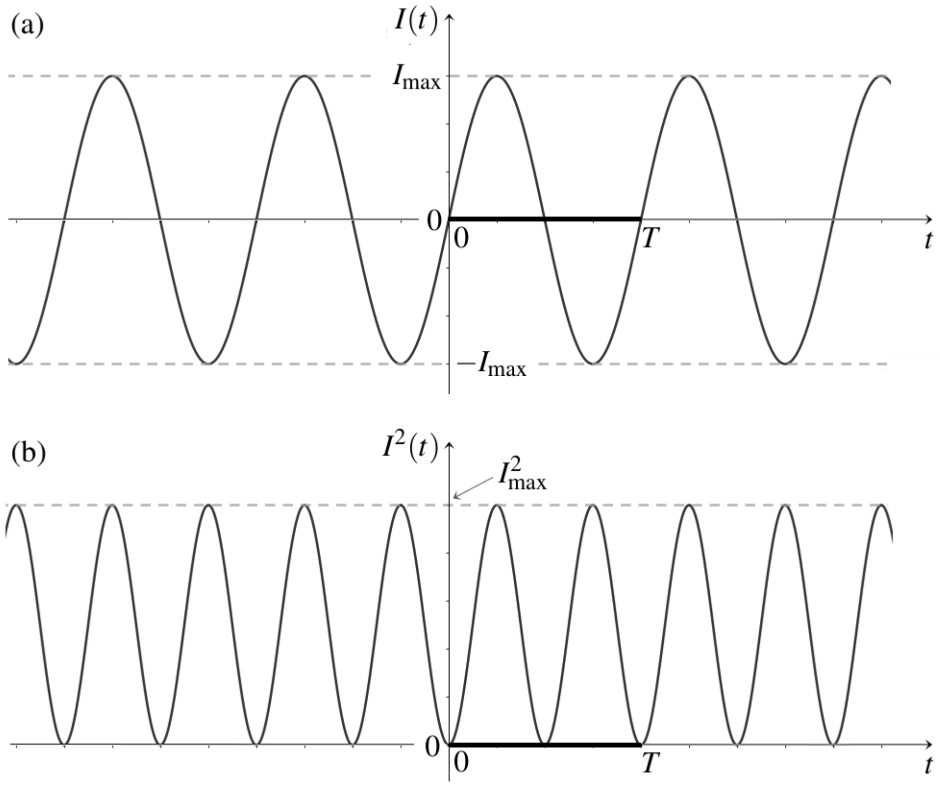


Figura 8: **(a)** Gráfico de uma corrente elétrica alternada do tipo senoidal, com o intervalo de tempo de 0 a T em destaque. **(b)** Gráfico da função $I^2(t)$ correspondente. Perceba que T é o período da função $I(t)$; o período da função $I^2(t)$ é $T/2$.

a) Considere uma corrente elétrica I que varia com o tempo t segundo

$$I(t) = I_{\max}\text{sen}(\omega t). \tag{48}$$

Trata-se de uma *corrente alternada*, de valor máximo $I_{\max}$ e frequência angular ω.[31] O gráfico dessa corrente alternada é mostrado na Fig. 8a. A figura deixa claro, por simetria, que o valor

[30] Temos, neste item **d**, um exemplo de "*manipulação do integrando*" - que é uma das três técnicas gerais de integração, como veremos na Parte II-B desta série.

[31] Se necessário, volte à Atividade 2-6 para rever o conceito de frequência angular, ω, que se aplica aqui da mesma forma que a um MHS - já que matematicamente as funções $x(t) = A\text{sen}(\omega t)$ e $I(t) = I_{\max}\text{sen}(\omega t)$ são equivalentes. Revise também a Atividade 2-7, se precisar lembrar que podemos usar tanto senos como cossenos para um MHS.

médio de $I(t)$ no intervalo de tempo de 0 a T é nulo, sendo $T = 2\pi/\omega$ o período desta função. Mostre que o valor médio de $I(t)$ em um intervalo de tempo $\Delta t = T$ é nulo, independentemente de onde tem início esse intervalo de tempo (por exemplo, pode ser o intervalo de tempo de $T/4$ a $5T/4$, ou o intervalo de tempo de $T/10$ a $11T/10$).[32]

b) Como o valor médio de $I(t)$ em um intervalo de tempo $\Delta t = T$ é nulo, é útil calcularmos o valor médio, ao longo de um período de $I(t)$, não desta função, mas de seu quadrado (veja a Fig. 8b). É o que você fará neste item. Calcule o valor médio de I^2, de $t = 0$ a $t = T = 2\pi/\omega$. Denote esse valor médio por $\overline{I^2}$.

c) Mostre que obtemos o mesmo valor para $\overline{I^2}$ considerando o intervalo de tempo de 0 a $T/2$; afinal, o período da função $I^2(t)$ é $T/2$, não T (veja a Fig. 8b).

d) Como $\overline{I^2}$ não tem unidade de corrente elétrica, mas de corrente elétrica ao quadrado, a quantidade de interesse não costuma ser $\overline{I^2}$, propriamente, mas sua raiz quadrada, $\sqrt{\overline{I^2}}$. Denotamos essa quantidade por I_{rms}, sendo “rms” as iniciais de “*root mean square*”. Ou seja, trata-se da *raiz da média do quadrado*:

$$I_{\text{rms}} \equiv \sqrt{\overline{I^2}} \ \ \text{(com a média calculada ao longo de um período de } I^2(t)\text{)}. \tag{49}$$

Mostre que o *valor rms* da corrente elétrica alternada em (48) é[33]

$$I_{\text{rms}} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_{\max} \approx 0{,}707\, I_{\max}.$$

e) Calcule $\overline{|I(t)|}$, considerando o intervalo de tempo de 0 a $T/2$, e compare o resultado obtido com o valor de I_{rms} calculado no item **d**.

Atividade 2-12:[34] Talvez a aplicação mais simples da equação de Schrödinger, que é uma equação fundamental da mecânica quântica, esteja na resolução do chamado problema do *poço de potencial infinito* ou da *partícula na caixa unidimensional*, em que uma partícula, restrita a se mover ao longo do eixo x, está confinada entre os pontos $x = 0$ e $x = L$ (sendo L, portanto, a largura do poço de potencial ou da caixa unidimensional). Pesquise a respeito. O que nos interessa, aqui, é que matematicamente tal problema consiste na resolução da equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\,\psi(x), \quad \text{para } 0 \le x \le L, \tag{50}$$

com as *condições de contorno*[35]

$$\psi(0) = 0 \tag{51}$$

e

$$\psi(L) = 0, \tag{52}$$

[32]Você pode se convencer disso a partir da Fig. 8a, mas também é interessante fazer as contas.

[33]Os técnicos em eletrotécnica ou eletrônica em geral têm esta relação memorizada: o valor rms (também chamado de *valor eficaz* - pesquise a respeito, se lhe interessar) de uma corrente alternada (do tipo senoidal) é aproximadamente igual a 70,7 % de seu valor máximo (ou *valor de pico*).

[34]Trabalhe os itens **a** a **e**. Se tiver fôlego, trabalhe também o item **g** (vale a pena, pois você encontrará a igualdade (63) em textos de física quântica). Agora, se você estiver realmente faminto ou faminta, trabalhe, adicionalmente, os itens **f** e **h**.

[35]Nas atividades 2-8 e 2-9 lidamos com *condições iniciais*. Nesta Atividade 2-12, você trabalhará com *condições de contorno*. Tecnicamente, não há diferença entre elas: trata-se de a função não apenas satisfazer a equação diferencial em questão, mas também ter que assumir valores específicos, em determinados pontos de seu domínio; mas o termo “condições iniciais” é usado quando a variável independente correspondente é *tempo*, enquanto o termo “condições de contorno” é mais usado quando a variável independente correspondente é *posição*.

sendo m a massa da partícula, E sua energia mecânica (que, neste problema, é simplesmente sua energia cinética) e $\hbar$ a constante de Planck, h (que é uma das constantes fundamentais da física), dividida por 2π - ou seja, $\hbar \equiv h/(2\pi)$. $\psi(x)$ é uma função cujo significado físico exploraremos mais adiante, nesta atividade, e está relacionada à chamada *função de onda* da partícula.[36] Mas tem algo que torna a equação diferencial em (50) diferente de uma equação diferencial como aquela em (26): a constante $-2mE/\hbar^2$, que multiplica $\psi(x)$ no membro direito de (50), não está predeterminada, porque *a energia E da partícula não está predeterminada; queremos, na verdade, prever seus possíveis valores*.[37] Assim, estamos interessados não apenas em todas as funções $\psi(x)$ que satisfazem (50), (51) e (52), mas também nos valores correspondentes de E. Muito bem, nossa experiência com funções trigonométricas nos traz, como boas candidatas, funções como

$$\psi(x) = A\cos(kx + \delta) \tag{53}$$

e

$$\psi(x) = B_1 \cos kx + B_2 \operatorname{sen} kx, \tag{54}$$

sendo A e k constantes positivas,[38] e δ, B_1 e B_2 constantes quaisquer - desde que B_1 e B_2 não sejam ambas nulas, é claro. Trabalharemos com essas duas soluções tentativa, mas começaremos com a segunda, porque, como veremos, ela nos leva mais diretamente à solução deste problema.

a) Mostre que $\psi(x)$ em (54) satisfaz a equação diferencial em (50), desde que tenhamos

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \tag{55}$$

Vale enfatizar: como E, em (50), não é uma constante predefinida, mas a ser determinada, dizemos que a condição para $\psi(x)$ em (54) satisfazer a equação diferencial em (50) é termos $E = \hbar^2 k^2/(2m)$, em vez de $k = \sqrt{2mE}/\hbar$. Você pode perguntar: *e faz diferença? Porque se k pode assumir qualquer valor positivo, E também pode ter qualquer valor positivo.* Mas veremos, no item **c**, que a condição de contorno em (52) restringe os valores que k pode assumir. E essa restrição então limita os valores possíveis para a energia E da partícula: veremos que se trata de uma *quantização da energia*: os valores que E pode assumir constituem um conjunto discreto - ou seja, enumerável (há o elemento 1, o elemento 2, o elemento 3, e assim por diante). E veremos que esse conjunto, além de discreto, é também infinito.

b) Mostre que a condição de contorno em (51), aplicada à função em (54), impõe que a constante B_1 deve ser nula. E com isso ficamos com

$$\psi(x) = B_2 \operatorname{sen} kx. \tag{56}$$

c) Mostre que a condição de contorno em (52), aplicada à função em (56), impõe que a constante k só pode assumir os seguintes valores (lembrando que restringimos os valores que k pode assumir a valores positivos):

$$k = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots\ . \tag{57}$$

[36] Para os curiosos: a *função de onda* desta partícula não é $\psi(x)$, mas $\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$, sendo t o instante considerado e i a *unidade imaginária* (que satisfaz a igualdade $i^2 = -1$). Exploraremos o significado de exponenciais complexas na Parte V desta série (veja a nota de rodapé número 11). A função $\psi(x)$ é usualmente chamada de *autofunção*.

[37] Para os que já estudaram um pouco de *álgebra linear*: a equação diferencial em (50) é uma *equação de autovalor*, enquanto aquela em (26) não, percebe? A propósito, é por isso que a função $\psi(x)$ é usualmente chamada de *autofunção*.

[38] Se você realizou a Atividade 2-7, fica fácil entender por que essa restrição sobre A e k não é realmente limitante.

E com isso ficamos com

$$\psi(x) = B_2 \text{sen}\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big), \quad n = 1, 2, 3, \dots \ . \tag{58}$$

Veja que temos, de fato, $\psi(x) = 0$ para $x = 0$ e para $x = L$, independentemente do valor de n.

d) Substituindo (57) em (55), mostre que os valores possíveis para a energia E da partícula são - agora denotando E por E_n, já que há um valor de E para cada valor de n:

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \ . \tag{59}$$

Segundo a mecânica quântica, estes são os únicos valores que podemos obter em uma medição da energia da partícula, se confinada entre $x = 0$ e $x = L$.[39] Observe, pelo desenvolvimento acima, que essa quantização de energia é consequência desse confinamento.

e) O significado físico mais comumente atribuído à função $\psi(x)$ é que a probabilidade $\mathbb{P}(a \leq x \leq b)$ de encontrarmos, em uma medição, a partícula entre os pontos $x = a$ e $x = b$ (dentro do intervalo $[0, L]$, é claro) é:

$$\mathbb{P}(a \leq x \leq b) = \int_a^b [\psi(x)]^2 \mathrm{d}x. \tag{60}$$

Como a partícula está confinada entre $x = 0$ e $x = L$, é certo ela ser encontrada nesse intervalo, e, portanto, $\mathbb{P}(0 \leq x \leq L) = 1$. Segue que

$$\mathbb{P}(0 \leq x \leq L) = \int_0^L [\psi(x)]^2 \mathrm{d}x = 1. \tag{61}$$

Substituindo (58) em (61), e agora denotando $\psi(x)$ por $\psi_n(x)$, obtenha:[40]

$$\psi_n(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{L}}\, \text{sen}\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big), \quad n = 1, 2, 3, \dots \ \ (0 \leq x \leq L). \tag{62}$$

Em seguida, esboce (separadamente) essas autofunções para $n = 1, 2, 3$ e 4.[41]

f) Passemos agora à *solução tentativa* em (53). Trabalhando com ela, obtenha as igualdades (59) e (62). (Este item e os próximos demandarão atenção especial de sua parte, quanto ao rigor matemático. Compare sua resolução dos mesmos com as de seus colegas, ou com a de seu professor ou sua professora.)

g) Considere, agora, que a partícula está confinada não entre os pontos $x = 0$ e $x = L$, mas entre os pontos $x = -L/2$ e $x = L/2$ (sendo ainda L, portanto, a largura do poço de potencial ou da caixa unidimensional). Trabalhando com a solução tentativa em (54), obtenha a igualdade (59) e a igualdade

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \pm\sqrt{\dfrac{2}{L}}\, \cos\Big(\dfrac{n\pi x}{L}\Big), & n = 1, 3, 5, \dots \\ \pm\sqrt{\dfrac{2}{L}}\, \text{sen}\Big(\dfrac{n\pi x}{L}\Big), & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad \Big(-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}\Big). \tag{63}$$

[39] Não significa que a partícula já possuía, antes da medição, aquela energia que foi medida; a própria medição pode ter produzido (segundo certas interpretações da mecânica quântica - incluindo a interpretação mais comum, que é a *interpretação de Copenhague*) o chamado *colapso da função de onda*... Pesquise a respeito.

[40] Na prática, não faz diferença termos $B_2 = \sqrt{2/L}$ ou $B_2 = -\sqrt{2/L}$, porque nos cálculos típicos de mecânica quântica trabalhamos com a autofunção elevada ao quadrado. Poderíamos, então, escolher $B_2 = \sqrt{2/L}$. Mas, como veremos no item **g**, há uma vantagem em escrevermos $B_2 = \pm\sqrt{2/L}$.

[41] É comum definirmos $\psi(x)$ para todo x real. Neste caso, como a partícula não pode ser encontrada fora do intervalo $(0, L)$, temos $\psi_n(x) = 0$ para $x \leq 0$ ou $x \geq L$, e isto pode ser considerado no esboço, para cada n, do gráfico de $\psi_n(x)$.

Em seguida, esboce (separadamente) essas autofunções para $n = 1, 2, 3$ e 4. Compare com os esboços que você realizou ao final do item **e**, e perceba que temos aqui uma *translação* daqueles gráficos, como esperado.[42]
h) Novamente considerando que a partícula está confinada não entre os pontos $x = 0$ e $x = L$, e sim entre os pontos $x = -L/2$ e $x = L/2$, mas agora trabalhando com a solução tentativa em (53), obtenha as igualdades (59) e (63).
Em nossa opinião, a escolha que mais simplifica a resolução do problema desta atividade é confinar a partícula entre $x = 0$ e $x = L$, e trabalhar com a solução tentativa em (54) - que foi o que fizemos até o item **e***. A escolha menos favorável é, possivelmente, aquela do item* **h***. (Julgue você mesmo, se realizou esta atividade por inteiro. Mas veja se você trabalhou com o rigor matemático necessário.)*

Atividade 2-13: Vimos, realizando as Atividades 2-1 e 2-2, que a partir da derivada de $\operatorname{sen} x$ podemos obter as derivadas de todas as demais funções trigonométricas (veja a Tabela 1). E você deve lembrar que para obtermos a derivada de $\operatorname{sen} x$ tivemos que calcular dois limites: aqueles expressos em (12) e (14). Com a realização desta atividade, você verá que o segundo deles pode ser facilmente obtido uma vez que tenhamos obtido o primeiro, e isso torna o limite em (12) ainda mais especial; não à toa ele é chamado de *limite trigonométrico fundamental*. Calcule

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{1 - \cos\theta}{\theta}$$

multiplicando $(1 - \cos\theta)/\theta$ por $(1 + \cos\theta)/(1 + \cos\theta)$ e reescrevendo a expressão resultante como

$$\frac{\sin\theta}{\theta}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{1 + \cos\theta}\right).$$

Lembre-se que o limite do produto é igual ao produto dos limites (quando tais limites existem). (Dica: em uma parte do desenvolvimento use a identidade $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$.)

Atividade 2-14: Quando trabalhamos com trigonometria no triângulo retângulo, é muito comum expressarmos ângulos em graus - mais do que em radianos. Mas quando passamos às *funções trigonométricas*, a regra é trabalharmos apenas com *argumentos em radianos*. E estamos usando a expressão "argumentos" porque não necessariamente as *entradas* das funções trigonométricas são medidas de ângulos. Por exemplo, temos $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$ sem que $\pi/2$ seja, necessariamente, uma medida angular, mas apenas um número real (revise a observação ao final da Atividade 2-6). Mas por que há essa regra? Vimos, nesta subseção, que as derivadas de todas as funções trigonométricas podem ser facilmente obtidas uma vez que conheçamos a derivada da função $f(x) = \operatorname{sen} x$. E vimos que o cálculo da derivada desta função envolve, de forma central, o cálculo do limite trigonométrico fundamental, expresso em (12). Mas o limite de $(\operatorname{sen}\theta)/\theta$, quando θ tende a 0, só é igual a 1 com θ expresso em radianos (se necessário, revise o desenvolvimento que nos levou à igualdade (12)). Portanto, a igualdade $[\operatorname{sen}\theta]' = \cos\theta$ (ou $[\operatorname{sen} x]' = \cos x$) não está correta com θ (ou x) expresso em graus, e isso compromete todos os resultados apresentados na Tabela 1. Então é por isso que *(praticamente) sempre trabalhamos, no cálculo diferencial e integral, com os argumentos das funções trigonométricas em radianos* (no sentido de que, por exemplo, $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$, seja $\pi/2$ uma medida angular ou não). Saber disso, entendendo bem a explicação que está sendo dada aqui, é o suficiente, em princípio. Mas será interessante explorarmos um pouco mais esse assunto, nesta atividade. Trata-se mais de uma curiosidade,

[42] Não chegaríamos a esta conclusão sem o "±" em (62) e (63) - e está aqui uma vantagem de seu uso naquelas expressões.

contudo, do que algo que seja comumente usado na física.

a) Se quisermos trabalhar com funções trigonométricas com argumentos em graus, em vez de radianos, devemos entender que estaremos lidando com funções distintas! Isso mesmo. Em primeiro lugar, mesmo medidas angulares são números puros - sejam elas expressas em graus ou em radianos. Escrevemos, por exemplo, 180^{o} ou π rad como um lembrete quanto à forma como os ângulos estão sendo medidos; mas podemos escrever, simplesmente: $\cos 180 = -1$, e $\cos\pi = -1$. Perceba, porém, que com isso estamos usando uma mesma notação para duas funções distintas! Vamos então nos permitir criar, aqui, a seguinte notação: uma função trigonométrica $f(x)$ será denotada por $f^{\text{o}}(x)$ *quando seu argumento estiver expresso em graus*, em vez de radianos. Com essa notação temos, por exemplo, $\cos^{\text{o}} 180 = -1$, e $\cos\pi = -1$, e com isso fica claro que temos duas funções distintas. Essa pequena sacada nos permite obter facilmente as derivadas de todas as funções trigonométricas com os argumentos expressos em graus. Primeiro, convença-se de que (seguindo a sequência de funções na Tabela 1)

$$\operatorname{sen}^{\text{o}} x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{180}x\right), \quad \cos^{\text{o}} x = \cos\left(\frac{\pi}{180}x\right), \quad \text{etc.}$$

Em seguida, usando a regra da cadeia, obtenha (veja a Tabela 1):

$$[\operatorname{sen}^{\text{o}} x]' = \frac{\pi}{180}\cos^{\text{o}} x, \quad [\cos^{\text{o}} x]' = -\frac{\pi}{180}\operatorname{sen}^{\text{o}} x, \quad \text{etc.}$$

Conclusão: *trabalhando com funções trigonométricas com os argumentos em graus, em vez de radianos, devemos incluir o fator* $\pi/180$ *nos membros direitos das igualdades na Tabela 1* (e, para evitar confusão, é interessante usarmos uma notação alternativa para essas novas funções, como a notação $f^{\text{o}}(x)$ que criamos aqui).

b) Neste item, faremos um teste numérico (rápido, simples, usando apenas uma calculadora eletrônica) do resultado

$$[\operatorname{sen}^{\text{o}} x]' = \frac{\pi}{180}\cos^{\text{o}} x.$$

Isso irá ajudá-lo ou ajudá-la a se convencer de sua validade; ou seja, deixará este resultado mais concreto. Vamos lá? Podemos obter um valor aproximado para a derivada $f'(x)$ de uma função $f(x)$ substituindo a igualdade

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

pela aproximação[43]

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad \text{com } \Delta x \textit{ suficientemente pequeno}.$$

O problema é que a expressão "suficientemente pequeno" é vaga: um valor de Δx que funciona bem para uma determinada função pode não servir para outra, entende? Mas quando conhecemos bem a função, conseguimos estimar um valor para Δx que seja, de fato, suficientemente pequeno. Uma análise do gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x$, por exemplo, sugere que obtemos, com $\Delta x = 0{,}000001$, uma aproximação excelente para $f'(x)$. Então podemos seguramente escrever:

$$[\operatorname{sen} x]' \approx \frac{\operatorname{sen}(x+\Delta x) - \operatorname{sen} x}{\Delta x}, \quad \text{com } \Delta x = 0{,}000001.$$

[43] Se $f(x) = ax+b$, com a e b números reais quaisquer, obtemos um resultado exato, não um resultado aproximado, concorda?

Vamos confirmar isso? Usando uma calculadora, configurada para argumentos de funções trigonométricas em radianos, e sabendo que a derivada de $\operatorname{sen} x$ é $\cos x$, verifique a qualidade desta aproximação com $x = \pi/6$, $x = \pi/4$ e $x = \pi/3$. Ou seja, preencha a Tabela 2, e verifique se os valores obtidos na coluna do meio aproximam bem os valores correspondentes na coluna da direita. Feito? Os resultados foram ótimos, não? Passemos à função $\operatorname{sen}^{\mathrm{o}} x$. Configurando

x	$[\operatorname{sen} x]' \approx [\operatorname{sen}(x+0{,}000001) - \operatorname{sen} x]/0{,}000001$	$\cos x$
$\pi/6$		
$\pi/4$		
$\pi/3$		

Tabela 2: Atividade 2-14.

sua calculadora para argumentos de funções trigonométricas em graus, teste numericamente a igualdade

$$[\operatorname{sen}^{\mathrm{o}} x]' = \frac{\pi}{180} \cos^{\mathrm{o}} x,$$

com $x = 30$, $x = 45$ e $x = 60$, usando, no membro esquerdo, a aproximação

$$[\operatorname{sen}^{\mathrm{o}} x]' \approx \frac{\operatorname{sen}^{\mathrm{o}}(x + \Delta x) - \operatorname{sen}^{\mathrm{o}} x}{\Delta x}, \quad \text{com } \Delta x = 0{,}000001.$$

Ou seja, preencha a Tabela 3, e verifique se os valores obtidos na coluna do meio aproximam bem os valores correspondentes na coluna da direita. Gostou do resultado? Entenda que o que mais nos interessa, aqui, não é a qualidade da aproximação (embora ela seja excelente), e sim o teste numérico da validade da igualdade $[\operatorname{sen}^{\mathrm{o}} x]' = (\pi/180) \cos^{\mathrm{o}} x$. Mas, como uma tarefa final, observe, adicionalmente, que $\Delta x = 0{,}000001$ produz aproximações melhores para $[\operatorname{sen}^{\mathrm{o}} x]'$ que para $\operatorname{sen} x$. Você entende por quê? Discuta com seus colegas.

x	$[\operatorname{sen}^{\mathrm{o}} x]' \approx [\operatorname{sen}^{\mathrm{o}}(x+0{,}000001) - \operatorname{sen}^{\mathrm{o}} x]/0{,}000001$	$(\pi/180) \cos^{\mathrm{o}} x$
30		
45		
60		

Tabela 3: Atividade 2-14.

2.2.3 Como calcular a derivada de uma função inversa; a regra da cadeia revisitada

Estamos considerando, aqui, que você conhece bem o tópico *funções inversas* ao nível do ensino médio - ou seja, que você compreende o conceito de função inversa, que sabe que uma função $f(x)$ só é inversível (ou invertível) se ela é bijetora (injetora e sobrejetora), que conhece o caminho padrão para a obtenção de $f^{-1}(x)$ a partir de $f(x)$, e que sabe que os gráficos de $f(x)$ e $f^{-1}(x)$ são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes 1 e 3. Estamos considerando, adicionalmente, que você estudou o tópico *composição de funções*, e que entende as igualdades

$$f(f^{-1}(x)) = x \qquad \text{e} \qquad f^{-1}(f(x)) = x. \tag{64}$$

Se nada disso faz sentido para você, faça uma pausa em seu estudo desta subseção, e se dedique a um estudo dos tópicos *composição de funções* e *funções inversas*, ao nível do ensino médio.

Muito bem, nosso objetivo, nesta subseção, é obter uma fórmula para o cálculo da derivada de $f^{-1}(x)$ - que denotamos por $(f^{-1})'(x)$ -, considerando que temos a expressão para $f'(x)$. Faremos isso de duas formas: primeiro, usando a notação de Leibniz, e depois derivando ambos os membros da primeira das igualdades em (64).

Seja f uma função inversível, e seja $y = f^{-1}(x)$ - e, portanto, $x = f(y)$. Temos:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}y} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \tag{65}$$

Alternativamente, derivando ambos os membros da primeira das igualdades em (64), obtemos (fazendo uso da regra da cadeia):

$$[f(f^{-1}(x))]' = [x]' \implies f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1 \implies (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \tag{66}$$

Esteja certo, ou certa, de ter entendido bem o uso da regra da cadeia, acima. Talvez uma breve revisão ajude, se você não entendeu bem este desenvolvimento. Seja y uma função de u, e u uma função de x. Temos (Silva & Peixoto 2020):

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}; \tag{67}$$

ou seja, *a derivada de y em relação a x é igual à derivada de y em relação a u vezes a derivada de u em relação a x*. Podemos reescrever esta igualdade com $y = f(u)$, $u = g(x)$ e, portanto, $y = f(g(x))$. Temos:

$$u = g(x) \implies \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g'(x),$$

$$y = f(u) \implies \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = f'(u) = f'(g(x)), \text{ e}$$

$$y = f(g(x)) \implies \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = [f(g(x))]'.$$

Podemos então reescrever a igualdade (67), relativa à regra da cadeia, como

$$\boxed{[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x).} \tag{68}$$

Esta igualdade tem uma forma que pode parecer mais complicada que a forma da igualdade equivalente (67), mas a igualdade (68) se assemelha muito a como costumamos usar a regra da cadeia na prática. Perceba isso neste exemplo, em que $f(x) = x^4$ e $g(x) = 5x^3 - x$, e, portanto, $f(g(x)) = (g(x))^4 = (5x^3 - x)^4$:

$$[\overbrace{(\underbrace{5x^3 - x}_{g(x)})^4}^{f(g(x))}]' = \overbrace{4(5x^3 - x)^3}^{f'(g(x))}\overbrace{(15x^2 - 1)}^{g'(x)}.$$

Veja como derivamos a função $(5x^3 - x)^4$ como se a base fosse x, em vez de $g(x) = 5x^3 - x$ (e daí a expressão $f'(g(x))$), e então multiplicamos o resultado pela derivada da "função interna" $g(x)$ - ou seja, por $g'(x)$.[44] Entenda que $f'(x) = 4x^3$, e, portanto, $f'(\square) = 4\square^3$, qualquer que seja a

[44]Chamamos $g(x)$ de "função interna", aqui, devido à composição $f(g(x))$.

entrada "$\square$" que faça sentido; troque $\square$ por $g(x)$, e o resultado é $f'(g(x)) = 4(g(x))^3$. Voltando à igualdade (68), no caso particular em que $g(x) = f^{-1}(x)$ obtemos:

$$[f(f^{-1}(x))]' = f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x),$$

igualdade esta que foi usada no desenvolvimento em (66).

Vamos por em destaque o resultado obtido em (65) e em (66):

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.} \tag{69}$$

Vejamos um exemplo. A função $f(x) = x^2$, com $x > 0$, é inversível, e sua inversa é (verifique) $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, com $x > 0$. Queremos calcular $(f^{-1})'(x)$ fazendo uso da igualdade (69). Vejamos:

$$[\sqrt{x}]' = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(\sqrt{x})}.$$

Como $f'(x) = 2x$, temos que $f'(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}$. Segue que

$$[\sqrt{x}]' = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

que é um resultado que você deve conhecer - ou, se não, pode facilmente obter com o uso da regra da potência; veja:

$$[\sqrt{x}]' = \left[x^{1/2}\right]' = \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

É interessante observar que também podemos obter, de uma forma muito simples, a derivada de $\sqrt{x}$ (e de outras funções inversas) sem a necessidade de memorização da igualdade (69), fazendo uso da notação de Leibniz:

$$\underbrace{y = \sqrt{x}}_{x=y^2} \implies [\sqrt{x}]' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}y} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \tag{70}$$

Muito bacana, não acha?

Passemos a um segundo exemplo - este bem mais interessante que o primeiro, porque não teremos uma "regra da potência" (ou algo similar) como alternativa. Vamos calcular a derivada da função $\operatorname{arctg} x$, que é a inversa da função $f(x) = \operatorname{tg} x$ restrita ao intervalo aberto $(-\pi/2, \pi/2)$ (veja a Fig. 6). Fazendo uso da igualdade (69), obtemos:

$$[\operatorname{arctg} x]' = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(\operatorname{arctg} x)}.$$

Como $f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \sec^2 x$ (veja a Tabela 1), temos que $f'(\operatorname{arctg} x) = \sec^2(\operatorname{arctg} x)$, e, portanto,

$$[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{\sec^2(\operatorname{arctg} x)}. \tag{71}$$

Alternativamente, usando a notação de Leibniz, em vez de a igualdade (69):

$$\underbrace{y = \operatorname{arctg} x}_{x=\operatorname{tg} y} \implies [\operatorname{arctg} x]' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}y} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{\sec^2(\operatorname{arctg} x)}. \tag{72}$$

Muito bem, chegamos a uma expressão para a derivada do arco tangente, certo? Sim, mas este resultado pode ser melhorado - e muito! A sacada é buscarmos uma identidade trigonométrica que relacione a secante (lembre-se que $\sec x \equiv 1/\cos x$) à tangente, pois $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, concorda? (Veja as igualdades em (64).) Partindo da identidade trigonométrica $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, dividindo ambos os membros por $\cos^2 x$ obtemos:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \implies \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \implies \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 \implies$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x,$$

que podemos reescrever como

$$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

Logo,

$$\sec^2(\operatorname{arctg} x) = 1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x) = 1 + [\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)]^2 = 1 + x^2. \tag{73}$$

Substituindo (73) em (71) obtemos, finalmente (daremos destaque a este resultado na subseção 2.2.4),

$$[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{1+x^2}. \tag{74}$$

Um resultado bem mais interessante do que aquele expresso em (71), concorda?

Atividade 2-15: No início desta subseção dissemos que estamos considerando, aqui, que você sabe (de seus estudos de matemática ao nível do ensino médio) que os gráficos de uma função $f(x)$ inversível e sua inversa $f^{-1}(x)$ são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes 1 e 3 (a reta de equação $y = x$). Vamos explorar essa simetria nesta atividade, através de um exemplo. Seja $f(x) = x^2$, com $x > 0$. Vimos que esta função é inversível, e que sua inversa é $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, com $x > 0$. A Fig. 9 apresenta os gráficos de $f(x) = x^2$ e $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ (com $x > 0$), com destaque para os pontos $\mathrm{A} = (1/4, 1/16)$ e $\tilde{\mathrm{A}} = (1/16, 1/4)$, respectivamente. A figura também mostra as retas t_{A} e $t_{\tilde{\mathrm{A}}}$ tangentes aos gráficos de $f(x)$ e $f^{-1}(x)$ nos pontos A e $\tilde{\mathrm{A}}$, respectivamente. Convença-se, pela simetria da figura formada pelos gráficos de $f(x)$ e $f^{-1}(x)$, de que $\tilde{\theta} = \theta$, e, a partir desta igualdade, obtenha:

$$(f^{-1})'(x_{\tilde{\mathrm{A}}}) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_{\tilde{\mathrm{A}}}))},$$

que é a igualdade (69) para $x = x_{\tilde{\mathrm{A}}} = 1/16$.

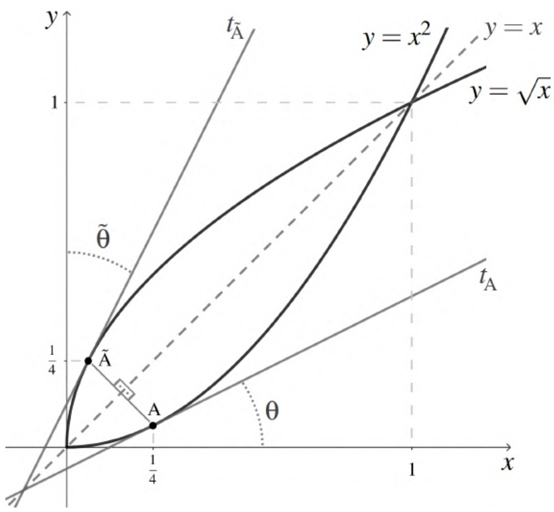


Figura 9: Atividade 2-15.

É claro, este desenvolvimento não se aplica apenas a $x_{\tilde{A}} = 1/16$, mas a todo x no domínio da função $f^{-1}(x)$ - o que nos leva à igualdade (69). Realizando esta atividade, você terá chegado, portanto, à igualdade (69) através de uma análise geométrica, e como consequência de uma simetria. Bacana, não acha? (Dica: lembre-se de que a derivada de uma função $f(x)$, para $x = x_P$, é igual ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto P de abscissa x_P (Silva & Peixoto 2020). Adicionalmente, observe que $\mathrm{tg}\,(\pi/2 - \tilde{\theta}) = 1/\mathrm{tg}\,\tilde{\theta}$.)

Atividade 2-16: Seja $f(x)$ uma função inversível não idêntica à sua inversa $f^{-1}(x)$.[45] Mostre, a partir da igualdade (69), que se o gráfico de $f(x)$ e o gráfico de $f^{-1}(x)$ se cruzam em um ponto P, de abscissa x_P, então

$$(f^{-1})'(x_P) = \frac{1}{f'(x_P)}.$$

Verifique esta igualdade para o exemplo apresentado na Fig. 9.

A próxima subseção é uma continuação natural desta subseção e da anterior, mas você pode considerar passar diretamente à subseção 2.2.5, por ter aplicação mais imediata em física básica. Neste caso, contudo, planeje estudar a subseção 2.2.4 em algum momento; não a deixe de fora de seus estudos, porque ela também é importante para a física (como tudo o que se encontra nos textos relativos ao projeto *Matemática para Física*).

2.2.4 Cálculo com funções trigonométricas inversas

Na subseção 2.2.2 - mais especificamente no item **e** da Atividade 2-8 - fizemos uma pequena digressão para mostrar que embora a função $\mathrm{tg}\,x$ não seja inversível (veja seu gráfico na Fig. 5), podemos restringir seu domínio para que a nova função assim obtida possua uma inversa: a função $\mathrm{arctg}\,x$ (veja a Fig. 6). Vamos aplicar a mesma ideia, aqui, às funções trigonométricas $\mathrm{sen}\,x$ e $\cos x$.[46]

A Fig. 10 mostra os gráficos das funções $\mathrm{sen}\,x$ e $\cos x$, as restrições padrão em seus domínios para tornar inversíveis as novas funções assim obtidas, e os gráficos dessas funções inversas - lembrando que o gráfico de uma função $f(x)$ inversível e o gráfico de sua inversa $f^{-1}(x)$ são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes 1 e 3.

A escolha padrão é restringir o domínio da função $\mathrm{sen}\,x$ ao intervalo fechado $[-\pi/2, \pi/2]$, e a inversa da função $\mathrm{sen_r}\,x$ assim obtida é a função *arco seno*, $\mathrm{arcsen}\,x$ (veja a Fig. 10a). Então a função $\mathrm{arcsen}\,x$ está definida para $-1 \leq x \leq 1$, e sua imagem é o intervalo fechado $[-\pi/2, \pi/2]$. É interessante visualizarmos isso, de forma complementar, como ilustra a Fig. 11a: imagine o ponto P movendo-se sobre a circunferência trigonométrica, de A a B. Com isso, a ordenada

[45] Há funções que são idênticas às suas inversas; elas são chamadas de *involuções* ou *funções involutivas*, e satisfazem a igualdade $f(f(x)) = x$ para todo x no domínio de f (veja as igualdades em (64)). São exemplos de involuções: $f(x) = x$, $f(x) = -x$, $f(x) = 1/x$ e $f(x) = -1/x$. São também funções idênticas às suas inversas: $f(x) = -x + b$ e $f(x) = a/x$, em que a é um número real não nulo qualquer e b é um número real qualquer. É claro, com $b = 0$, $a = 1$ e $a = -1$ recaímos nas funções $f(x) = -x$, $f(x) = 1/x$ e $f(x) = -1/x$, respectivamente. Você identifica mais alguma função idêntica à sua inversa? Um exemplo menos trivial é $f(x) = x/(x-1)$ - embora se trate, simplesmente, da função $f(x) = 1/x$ transladada uma unidade "para a direita" e uma unidade "para cima" (como veremos na Parte II-B desta série). Perceba que qualquer função cujo gráfico é simétrico em relação à reta de equação $y = x$ (a bissetriz dos quadrantes ímpares) é uma involução.

[46] Também podemos restringir os domínios das outras três funções trigonométricas - as funções $\sec x \equiv 1/\cos x$, $\mathrm{cossec}\,x \equiv 1/\mathrm{sen}\,x$ e $\mathrm{cotg}\,x \equiv 1/\mathrm{tg}\,x$ - para que as novas funções assim obtidas sejam inversíveis; mas as inversas dessas funções modificadas - as funções *arco secante*, *arco cossecante* e *arco cotangente*, respectivamente - são bem menos usadas em física, e, assim, não trabalharemos com elas neste texto. Se você necessitar de alguma delas em algum ponto de sua jornada, não será demais fazer uma pausa para estudá-la, certo?

de P - que denotamos por x, em vez do usual "y" para ordenadas - varia de -1 a 1, e o "ângulo" correspondente $\theta = \operatorname{arcsen} x$ varia de $-\pi/2$ a $\pi/2$. Portanto, a função arco seno associa cada $x \in [-1,1]$ a um $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, da forma indicada na Fig. 11a. Temos, por exemplo, $\operatorname{arcsen}(1/2) = \pi/6$, porque, dentro do intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, *o "arco"* (o "ângulo" ou o "argumento") *cujo seno é* $1/2$ *é* $\pi/6$. Aliás, *esta é uma boa dica para ler a função arco seno:* $\operatorname{arcsen} x$ *é o "arco" cujo seno é x, dentro do intervalo* $[-\pi/2, \pi/2]$.

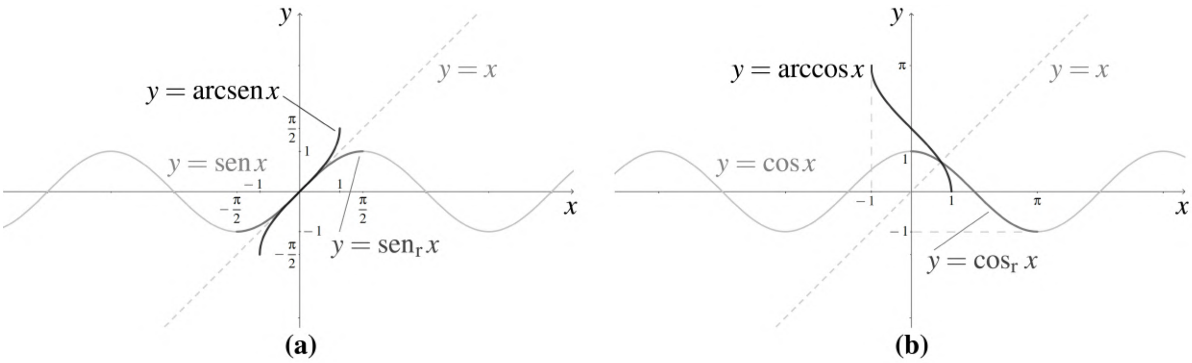


Figura 10: **(a)** Gráficos da função $\operatorname{sen} x$, da função $\operatorname{sen} x$ restrita ao intervalo fechado $[-\pi/2, \pi/2]$ - aqui denotada por $\operatorname{sen}_r x$ -, e de sua inversa, $\operatorname{sen}_r^{-1} x = \operatorname{arcsen} x$. **(b)** Gráficos da função $\cos x$, da função $\cos x$ restrita ao intervalo fechado $[0, \pi]$ - aqui denotada por $\cos_r x$ -, e de sua inversa, $\cos_r^{-1} x = \arccos x$.

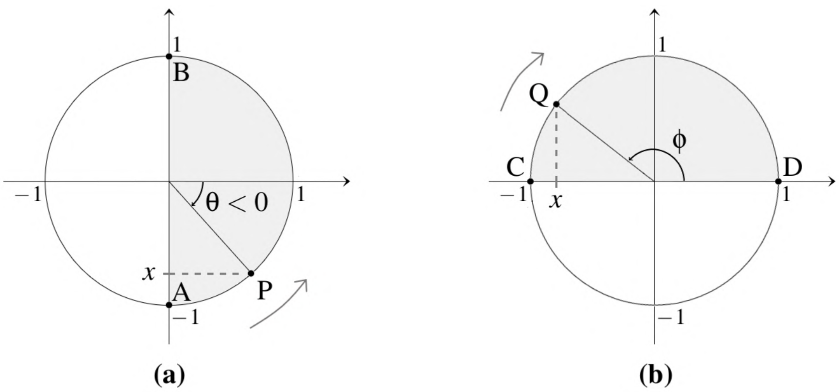


Figura 11: Uma forma de visualizarmos as funções arco seno e arco cosseno: **(a)** $\theta = \operatorname{arcsen} x$, com x variando de -1 a 1 (o que corresponde ao ponto P mover-se de A a B); **(b)** $\phi = \arccos x$, com x variando de -1 a 1 (o que corresponde ao ponto Q mover-se de C a D).

Para a função $\cos x$, a escolha padrão é restringir o domínio ao intervalo fechado $[0, \pi]$,[47] e a inversa da função $\cos_r x$ assim obtida é a função *arco cosseno*, $\arccos x$ (veja a Fig. 10b). Então a função $\arccos x$ está definida para $-1 \leq x \leq 1$, e sua imagem é o intervalo fechado $[0, \pi]$. É interessante visualizarmos isso, de forma complementar, como ilustra a Fig. 11b: imagine o ponto Q movendo-se sobre a circunferência trigonométrica, de C a D. Com isso, a abscissa x de Q varia de -1 a 1, e o "ângulo" correspondente $\phi = \arccos x$ varia de π a 0. Portanto, a função arco cosseno associa cada $x \in [-1, 1]$ a um $\phi \in [0, \pi]$, da forma indicada na Fig. 11b. Temos, por exemplo, $\arccos(1/2) = \pi/3$, porque, dentro do intervalo $[0, \pi]$, *o "arco"* (o "ângulo" ou o

[47] Perceba que restringindo o domínio da função $\cos x$ ao intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ não obtemos uma função inversível. A escolha do intervalo $[0, \pi]$ é, portanto, natural - embora não seja a única possível; poderíamos ter escolhido, por exemplo, o intervalo $[-\pi, 0]$, mas esta não é a escolha padrão (não é a adotada em sua calculadora eletrônica, por exemplo).

"argumento") *cujo cosseno é* $1/2$ *é* $\pi/3$. *E esta é uma boa dica para ler a função arco cosseno:* $\arccos x$ *é o "arco" cujo cosseno é x, dentro do intervalo* $[0,\pi]$.

Estamos prontos para o cálculo das derivadas das funções $\operatorname{arcsen} x$ e $\arccos x$. É o que você fará, realizando a Atividade 2-17.

Atividade 2-17: a) Na subseção 2.2.3 mostramos que (veja a igualdade (74))

$$\boxed{[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).} \tag{75}$$

Seguindo desenvolvimentos semelhantes, mostre que

$$\boxed{[\operatorname{arcsen} x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)} \tag{76}$$

e

$$\boxed{[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1).} \tag{77}$$

b) Lembrando da interpretação geométrica da derivada $f'(x)$ como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto de abscissa x (Silva & Peixoto 2020), convença-se de que as expressões para $[\operatorname{arctg} x]'$, $[\operatorname{arcsen} x]'$ e $[\arccos x]'$ em (75), (76) e (77) estão de acordo com o que poderíamos esperar - qualitativamente - a partir dos gráficos nas Figs. 6b, 10a e 10b, respectivamente.

Atividade 2-18: a) Comparando as igualdades (76) e (77), podemos obter uma relação entre as funções arco cosseno e arco seno: $\arccos x = -\operatorname{arcsen} x + C$, em que C é uma constante a ser determinada; afinal, duas funções que possuem a mesma derivada (no caso, $\arccos x$ e $-\operatorname{arcsen} x$) diferem entre si apenas por uma constante aditiva. Escolhendo um valor para x no intervalo $[-1,1]$ (há várias opções interessantes), mostre que $C = \pi/2$, e, portanto,

$$\boxed{\arccos x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} x \quad (-1 \leq x \leq 1).} \tag{78}$$

b) Visualize esta relação na Fig. 10. (Dica: obtemos o gráfico de $-\operatorname{arcsen} x$ *refletindo* o gráfico de $\operatorname{arcsen} x$ em relação ao eixo x.)
c) Obtenha a igualdade (78) diretamente a partir da Fig. 11 (portanto, sem fazer uso de cálculo diferencial). (Dica: combine a Fig. 11a e a Fig. 11b em uma mesma figura, considerando que o valor de x é o mesmo nas duas.)
d) Obtenha a igualdade (77) a partir das igualdades (76) e (78).

Atividade 2-19: a) Convença-se de que

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad F(x) = \operatorname{arctg} x + C \quad (x \in \mathbb{R})} \tag{79}$$

e

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1) \quad \Longrightarrow \quad F(x) = \operatorname{arcsen} x + C \quad (-1 < x < 1),} \tag{80}$$

em que C é uma constante arbitrária. (Atenção: não é para calcular essas antiderivadas; apenas para fazer uso do que você viu acima sobre derivadas de funções trigonométricas inversas. Por

isso o enunciado desta atividade começa com "Convença-se de que", em vez de "Mostre que".)
b) Adicionalmente, convença-se de que podemos reescrever (80) como

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ \ (-1 < x < 1) \quad \Longrightarrow \quad F(x) = -\arccos x + C \ \ (-1 < x < 1).} \tag{81}$$

Isso mostra que as antiderivadas de $1/\sqrt{1-x^2}$ podem ser expressas com o uso de $\operatorname{arcsen} x$ ou de $\arccos x$ - o que não é uma surpresa, devido à relação em (78). De modo similar, temos:

$$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ \ (-1 < x < 1) \quad \Longrightarrow \quad F(x) = \arccos x + C \ \ (-1 < x < 1) \tag{82}$$

e

$$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ \ (-1 < x < 1) \quad \Longrightarrow \quad F(x) = -\operatorname{arcsen} x + C \ \ (-1 < x < 1), \tag{83}$$

em que C é uma constante arbitrária.

Atividade 2-20: a) Tendo realizado a Atividade 2-19, obtenha, por inspeção, as antiderivadas de

$$f(x) = \frac{1}{1+(ax)^2} \ (x \in \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(ax)^2}} \ (-1/a < x < 1/a),$$

sendo a uma constante positiva.
b) Agora obtenha, também por inspeção, as antiderivadas de

$$f(x) = \frac{1}{1+(x/A)^2} \ (x \in \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(x/A)^2}} \ (-A < x < A),$$

sendo A uma constante positiva.
c) Por fim, obtenha as antiderivadas de

$$f(x) = \frac{1}{A^2+x^2} \ (x \in \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{A^2-x^2}} \ (-A < x < A),$$

sendo A uma constante positiva. (Dica: manipule as expressões para $f(x)$ e $g(x)$ de modo a obter as expressões para as funções no item **b**, multiplicadas por uma constante.)

Atividade 2-21: Você esteve ocupado com o *oscilador harmônico* nas atividades 2-6 a 2-9. Vamos revisar o que interessa, daquelas atividades, para a realização da atividade atual. Na Atividade 2-6, dissemos que todo movimento em que a posição x varia com o tempo t segundo

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta),$$

em que A, ω e δ são constantes - as duas primeiras positivas e a última podendo ser positiva, negativa ou nula -, é denominado *movimento harmônico simples* (MHS).[48] Na Atividade 2-7, vimos que a função seno pode ser usada no lugar da função cosseno, na expressão para $x(t)$ de uma partícula em MHS; ou seja, podemos, alternativamente, escrever:

$$x(t) = A\operatorname{sen}(\omega t + \delta).$$

[48] É claro, podemos denotar posição usando outras letras; não precisa ser "x". E não é necessário que o MHS seja simétrico em relação ao ponto $x = 0$. Também temos um MHS em $x(t) = A\cos(\omega t + \delta) + B$, em que B é uma constante qualquer, com dimensão de comprimento. Neste caso, o MHS é simétrico em relação ao ponto $x = B$. Mas, por simplicidade, fazemos quase sempre $B = 0$.

Na Atividade 2-8, mostramos que uma partícula de massa m sujeita a uma força resultante com a direção do eixo x, e cuja componente x obedece à *lei de Hooke*,

$$F_{\text{res}_x} = -kx,$$

sendo k uma constante positiva, realiza um MHS de frequência angular

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Nesta atividade, faremos algo semelhante ao que fizemos na Atividade 2-8, mas trabalhando com energia, em vez de força. Mais especificamente: nesta atividade você mostrará que uma partícula se movendo ao longo do eixo x com energia mecânica E constante e energia potencial $U(x) = kx^2/2$ ($k > 0$) - que você deve reconhecer como "energia potencial elástica" - realiza um MHS.

a) Partindo da relação $E = K + U$, em que $U = U(x)$ e $K = mv_x^2/2$, com $v_x \equiv \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, obtenha a seguinte igualdade:

$$v_x(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - U(x)}. \tag{84}$$

A ambiguidade no sinal de $v_x(x)$, na expressão acima, existe porque considerações de energia não podem determinar o sentido da velocidade, percebe? Afinal, a energia cinética K envolve apenas o módulo da velocidade (além da massa da partícula, é claro).

b) A Fig. 12 mostra o gráfico da energia potencial $U(x)$ da partícula, e também indica, por uma linha horizontal, sua energia mecânica E, suposta constante. Como, necessariamente, temos $U(x) \leq E$, pois não existe energia cinética negativa (observe, inclusive, que não podemos ter $U(x) > E$ na igualdade (84)), a partícula está confinada entre os pontos $x = -A$ e $x = A$.[49] Em $x = -A$ e em $x = A$ temos $U = E$, e daí segue a relação

$$E = \frac{1}{2}kA^2, \tag{85}$$

importante no estudo do oscilador harmônico. Vamos considerar que entre os instantes $t_0 = 0$ e t a partícula se move *sempre em um mesmo sentido*, dentro do intervalo $[-A, A]$: da posição x_0 à posição x. Com isso temos, entre $t_0 = 0$ e t, $v_x > 0$ (e, neste caso, $x > x_0$) ou $v_x < 0$ (e, neste caso, $x < x_0$), mas *nenhuma troca no sinal de* v_x. A constância do sinal de v_x, entre $t_0 = 0$ e t, garante que, nesse intervalo de tempo, v_x é função da posição da partícula, concorda? (Veja a igualdade (84).) Com a consideração acima, e partindo da igualdade $v_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, obtenha:

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{v_x(\tilde{x})}. \tag{86}$$

Perceba que esta igualdade não faria sentido se v_x não fosse função da posição da partícula - denotada por $\tilde{x}$ no integrando -, porque haveria ambiguidade quanto ao valor de v_x para $\tilde{x}$ em algum intervalo entre x_0 e x. E v_x não é função da posição da partícula se o sinal de v_x muda, no deslocamento da partícula de x_0 a x, não é?

c) Agora, substituindo (84) em (86) obtenha

$$t = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\sqrt{E - U(\tilde{x})}}, \quad \text{sendo o sinal no membro direito o sinal de } v_x. \tag{87}$$

[49] Rigorosamente, o gráfico de $U(x)$ deveria terminar nos pontos de abscissas $-A$ e A; mas é uma prática comum, na física, esboçarmos o gráfico da função $U(x)$ sem considerarmos o valor de E. É uma forma de visualizarmos o que ocorre ao alterarmos o valor da energia mecânica da partícula.

A igualdade (87) é muito interessante, porque se conseguirmos calcular a integral na mesma, supondo conhecida a função $U(\tilde{x})$, e se conseguirmos resolver a equação resultante para x, obteremos $x(t)$.[50]

d) Nesta atividade temos
$$U(\tilde{x}) = k\tilde{x}^2/2. \tag{88}$$
Considerando $v_x > 0$, substitua (85) e (88) em (87), calcule a integral resultante e com isso obtenha uma equação relacionando t e x. (Dica: faça manipulações no integrando e use um dos resultados que você obteve ao realizar a Atividade 2-20. Trabalhe com um arco seno, em vez de com um arco cosseno. Deixaremos o arco cosseno para o item **f**.)

e) Resolvendo, para x, a equação encontrada no item **d**, obtenha:
$$x = A\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \delta), \text{ com } A = \sqrt{2E/k},\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ e } \delta = \mathrm{arcsen}(x_0/A), \tag{89}$$
estando x_0 entre $-A$ e A.

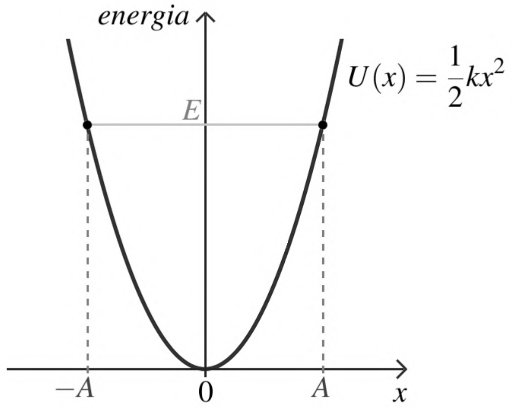


Figura 12: Atividade 2-21.

Por enquanto, o resultado em (89) só vale para os instantes t, a partir de $t_0 = 0$, nos quais $v_x \geq 0$ (revise o item **d**).[51] Podemos estender esse intervalo de tempo o máximo possível fazendo $x = -A$ para $t = 0$, e, com isso, o resultado em (89) é válido até o instante t em que $x = A$ (porque com isso garantimos $v_x \geq 0$). A sacada é que, a partir daí, o movimento se inverte, e de modo totalmente simétrico[52] - simetria essa que a função em (89) já possui! Ou seja, ela já dá conta dessa simetria! A conclusão é que o resultado em (89) vale para todo instante t em que o movimento existir. Com isso, resolvemos completamente o problema do oscilador harmônico, fazendo uso da igualdade (87).[53]

f) No item **d**, poderíamos ter usado a função arco cosseno, em vez da função arco seno, e com isso teríamos obtido (naturalmente) uma função cosseno em (89), em vez de uma função seno.

[50] Se houver, no movimento considerado, e no intervalo de tempo considerado, uma mudança no sinal de v_x, não poderemos usar a igualdade (87), pois a igualdade (86) - da qual ela deriva - não será válida, já que não teremos v_x como uma função da posição da partícula. Mas, como veremos, isso não será um problema nesta atividade.

[51] Podemos incluir a igualdade, $v_x = 0$, porque sabemos que em $x = -A$ e em $x = A$ a partícula está em repouso.

[52] Convença-se disso observando que, na igualdade (84) (com $U(x) = kx^2/2$), para um mesmo valor de x (entre $-A$ e A) temos dois valores possíveis para v_x, *mas de mesmo módulo*.

[53] Para os leitores mais atentos: ainda temos, em (89), com $\delta = \mathrm{arcsen}(x_0/A)$, a restrição de que $v_x \geq 0$ para $t = 0$. Se quiser checar, calcule $v_x \equiv \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ para $t = 0$. Contudo, essa restrição pode ser eliminada com uma modificação no valor de δ. O que importa é que temos, aqui, a solução completa do problema do oscilador harmônico, porque mostramos que a função $x(t)$ em (89) vale para todo instante t - positivo, negativo ou nulo - em que o movimento existir. Com isso, podemos mudar o instante em que "zeramos o cronômetro" mudando o valor de δ, entende?

Mas, você sabe, podemos passar de senos para cossenos (e vice-versa) facilmente, na descrição de um MHS, como vimos realizando a Atividade 2-7. Contudo, será um bom treino para você refazer o que pede os itens **d** e **e**, mas, desta vez, fazendo uso de um arco cosseno, em vez de um arco seno. Obtenha, ao final:

$$x = A\,\cos(\omega t + \delta),\ \text{com}\ A = \sqrt{2E/k},\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\ \text{ e }\ \delta = -\arccos(x_0/A), \tag{90}$$

estando x_0 entre $-A$ e A.

Atividade 2-22: Encerramos nosso trabalho com o oscilador harmônico. Mas vamos explorar um pouco mais, nesta atividade, a igualdade (87) (releia o texto em itálico logo após a mesma).
a) Vamos iniciar com o caso trivial de uma partícula livre, para a qual podemos fazer $U = 0$. Obtenha, a partir da igualdade (87), a seguinte igualdade:

$$x = x_0 + v_x t, \quad v_x \text{ constante},$$

que é o resultado esperado.
b) Agora, consideremos uma partícula em queda livre, abandonada em repouso no instante $t = 0$. Adote como o eixo x um eixo vertical apontando *para baixo*, e com origem no ponto em que a partícula é abandonada em repouso. Então fazendo $U(\tilde{x}) = -mg\tilde{x}$ em (87) (sendo g o módulo da aceleração da gravidade local), calculando a integral resultante, e resolvendo a equação decorrente para x, obtenha

$$x = \frac{1}{2}gt^2,$$

que é o resultado esperado, não é? Adicionalmente, mostre que o resultado obtido para $x(t)$ é o mesmo com $U(\tilde{x}) = -mg\tilde{x} + U_0$, em que U_0 é uma constante não necessariamente nula. (Dica para esta última parte: não é necessário refazer todas as contas.)

2.2.5 Cálculo com funções exponenciais e com funções logarítmicas

Funções exponenciais

Dizemos que uma função $f(x)$ é uma *função exponencial de base b* se

$$f(x) = b^x, \qquad \text{com } 0 < b \neq 1 \quad \text{e} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{91}$$

Assim, são exemplos de funções exponenciais:

$$f(x) = 2^x \quad \text{e} \quad g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{3^x} = 3^{-x}.$$

(Naturalmente, estamos supondo que você sabe fazer manipulações algébricas como as apresentadas acima, relativas às expressões equivalentes para $g(x)$.)

Você pode perguntar: qual é a necessidade da restrição $0 < b \neq 1$, na definição em (91)? Vejamos. Se esta restrição não é satisfeita, temos $b < 0$ ou $b = 0$ ou $b = 1$. Vamos analisar cada caso. **(1)** Com $b < 0$, b^x não é um número real para todo x real. Por exemplo, com $b = -4$ e $x = 1/2$ teríamos: $b^x = (-4)^{1/2} = \sqrt{-4}$, que não é um número real. **(2)** O caso em que $b = 0$

seria igualmente problemático, porque $0^x = 0$ para todo x real positivo, 0^0 pode ser definido como 1 ou não ter significado (dependendo do contexto), e 0^x não está definido para $x < 0$. **(3)** Com $b = 1$ teríamos: $b^x = 1^x = 1$, para todo x real. Ou seja, com $b = 1$ teríamos uma função constante - que não faria muito sentido ser considerada um caso particular de uma função exponencial, concorda?

É muito importante conhecermos bem os dois tipos de gráfico de uma função exponencial de base b, $f(x) = b^x$ (com $0 < b \neq 1$). Eles estão ilustrados na Fig. 13. Temos um gráfico do primeiro tipo quando $b > 1$ (escolhemos $b = 2$, na Fig. 13a), e um gráfico do segundo tipo quando $0 < b < 1$ (escolhemos $b = 1/2$, na Fig. 13b). Convença-se disso substituindo alguns valores para x em 2^x e em $(1/2)^x$. Observe que nos dois tipos de gráfico temos $f(0) = 1$, qualquer que seja o valor de b (com $0 < b \neq 1$). Observe também que temos $f(x) > 0$ para todo x real.

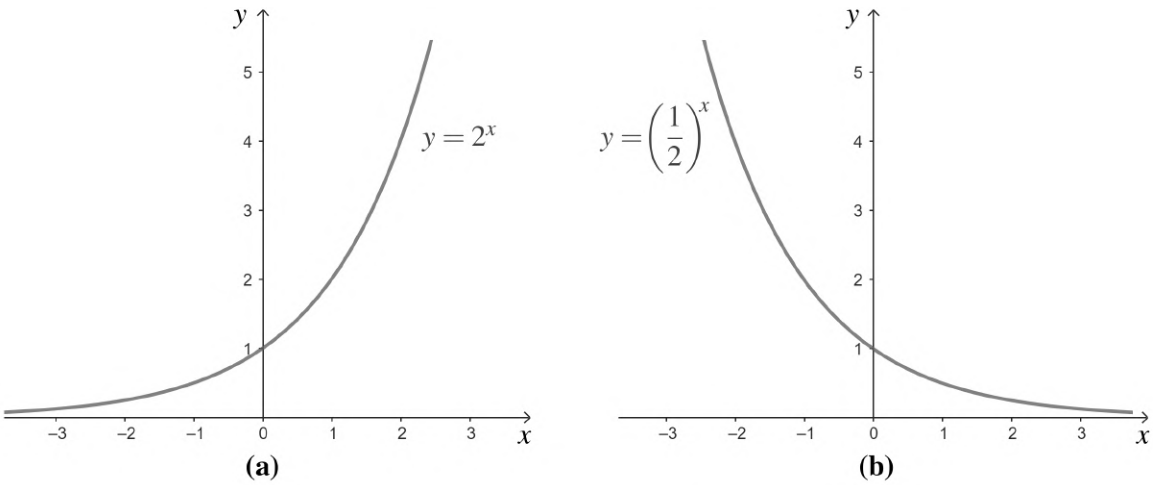


Figura 13: Exemplos dos dois tipos de gráfico de uma função exponencial de base b ($0 < b \neq 1$): **(a)** quando $b > 1$ e **(b)** quando $0 < b < 1$.

Atividade 2-23: a) Na Fig. 14a temos os gráficos de três funções exponenciais de base maior que 1. Escreva as bases b_1, b_2 e b_3 em ordem crescente. Daí, visualize como o gráfico de uma função $f(x) = b^x$, com $b > 1$, muda quando aumentamos ou diminuímos o valor de b.

b) Na Fig. 14b temos os gráficos das funções b_1^{-x}, b_2^{-x} e b_3^{-x}, com os mesmos b_1, b_2 e b_3 do item **a** (todos maiores que 1). Perceba que estas três funções são funções exponenciais de bases $1/b_1$, $1/b_2$ e $1/b_3$, respectivamente, mas na física é muito comum escrevermos uma função como $(1/b_1)^x$, com $b_1 > 1$, na forma b_1^{-x}. Sua tarefa neste item é visualizar, com o auxílio da Fig. 14b, como o gráfico de uma função $f(x) = b^{-x}$, com $b > 1$, muda quando aumentamos ou diminuímos o valor de b (dê atenção tanto à região $x < 0$ quanto à região $x > 0$). Treine um pouco, que é muito útil, para um físico ou uma física, conseguir realizar esse tipo de visualização rapidamente.

c) Como um complemento da atividade realizada no item **b**, use um programa como o Geogebra para plotar o gráfico de $f(x) = b^x$, com o parâmetro $b > 0$ livre para variar - digamos, de $1/5$ a 5. No Geogebra você pode, inclusive, facilmente gerar uma animação, com o valor de b *oscilando* entre $1/5$ e 5. Você verá que o caso $b = 1$ - que está excluído na definição de uma função exponencial (já que $1^x = 1$ para todo x real), mas que o Geogebra considera - tem aqui um significado bem interessante: sem ele haveria uma "lacuna" (uma "descontinuidade") nessa animação (embora isso talvez não fosse facilmente perceptível).

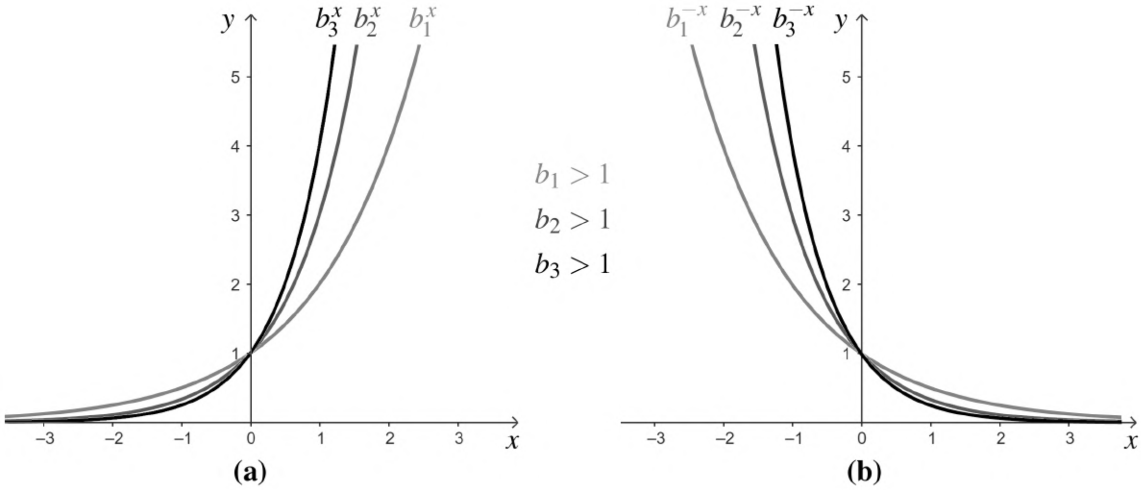


Figura 14: Atividade 2-23.

Funções logarítmicas

A inversa de uma função exponencial de base b, b^x (com $0 < b \neq 1$ e $x \in \mathbb{R}$), é a *função logarítmica de base b*,

$$\log_b x, \qquad \text{com } 0 < b \neq 1 \quad \text{e} \quad x > 0.$$

Veja:

$$y = f(x) = b^x \ (0 < b \neq 1) \qquad \Longrightarrow \qquad x = f^{-1}(y) = \log_b y \ \ (\text{sendo } y > 0, \text{ pois } y = b^x > 0)$$
$$\overset{\text{trocando}}{\underset{}{\overset{\text{“y” por “x”}}{\Longrightarrow}}} \qquad f^{-1}(x) = \log_b x \ \ (\text{sendo } x > 0).$$

Dizemos, portanto, que uma função $f(x)$ é uma *função logarítmica de base b* se

$$f(x) = \log_b x, \qquad \text{com } 0 < b \neq 1 \quad \text{e} \quad x > 0. \tag{92}$$

Assim, são exemplos de funções logarítmicas:

$$f(x) = \log_2 x \quad \text{e} \quad g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x.$$

Obviamente, estamos supondo, aqui, que você estudou *logaritmos*, ao nível do ensino médio, ou o que está escrito acima não faz o menor sentido para você.[54] Em todo caso, faremos, a seguir, uma breve revisão de logaritmos, e só então retomaremos o nosso estudo das funções logarítmicas.

Logaritmos: uma breve revisão

Essencialmente, *logaritmos são expoentes*. Dizemos, por exemplo, que o logaritmo de 8 na base 2 é 3 - e escrevemos[55] $\log_2 8 = 3$ - porque ao expressarmos o número 8 como uma potência de base 2, elevamos esta base ao expoente 3; afinal, $2^3 = 8$. Um segundo exemplo: dizemos que o logaritmo de 4 na base $1/2$ é -2 - e escrevemos $\log_{1/2} 4 = -2$ - porque ao

[54]Também estamos supondo que você estudou a subseção 2.2.3. Ela é pré-requisito para esta subseção.
[55]Lembre-se: lemos “$\log_2 8$” como “log de 8 na base 2”.

expressarmos o número 4 como uma potência de base $1/2$, elevamos esta base ao expoente -2; afinal, $(1/2)^{-2} = 4$.

Por padrão, na expressão

$$\log_b a,$$

temos $0 < b \neq 1$ e $a > 0$. Esta restrição, sobre os valores de a e de b, se justifica porque nos interessa trabalhar com a função real $\log_b x$, e, como vimos acima, ela está definida para $x > 0$, com $0 < b \neq 1$. Contudo, poderíamos dizer, por exemplo, que $\log_{-2}(-8) = 3$, pois $(-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -8$. E isso está, de certa forma, correto; mas não se trata da função logarítmica como inversa da função exponencial real (por termos, na expressão $\log_{-2}(-8)$, tanto uma base, -2, negativa como um *logaritmando*, -8, negativo). Curiosamente, quando trabalhamos com números complexos, a igualdade $\log_{-2}(-8) = 3$ é uma das infinitas possibilidades para a expressão $\log_{-2}(-8)$.[56] Mas *daqui pra frente, neste texto, todo logaritmo será calculado para um número real positivo, considerando-se uma base positiva e diferente de* 1. Algumas vezes você será lembrado ou lembrada disso; outras, não.

Atividade 2-24: Convença-se de que

$$\log_b 1 = 0 \quad \text{e} \quad \log_b b = 1,$$

qualquer que seja b satisfazendo $0 < b \neq 1$.

Chamamos de *logaritmação* a *operação* que consiste no cálculo de um expoente (logaritmo) ao qual devemos elevar uma determinada base para obtermos um certo número (como em $\log_2 8 = 3$). E há três *propriedades básicas da logaritmação*, que nós, físicos, precisamos conhecer bem. São elas:

$$\log_b(a_1 a_2) = \log_b a_1 + \log_b a_2, \tag{93}$$
$$\log_b \frac{a_1}{a_2} = \log_b a_1 - \log_b a_2, \tag{94}$$
$$\log_b(a^\gamma) = \gamma \log_b a, \tag{95}$$

em que b é um número real positivo diferente de 1, a_1, a_2 e a são números reais positivos quaisquer, e γ é um número real qualquer. Estas três propriedades seguem de propriedades correspondentes da potenciação, certamente familiares a você. Para mostrar isso, vamos começar expressando a_1 e a_2 como potências de base b:[57]

$$a_1 = b^{c_1} \quad \text{e} \quad a_2 = b^{c_2}.$$

[56] Para leitores mais avançados ou mais curiosos: trabalhando com funções de variáveis complexas, obtemos $\log_{-2}(-8) = (\ln 8 + (2m+1)\pi i)/(\ln 2 + (2n+1)\pi i)$, em que m e n são dois números inteiros quaisquer, i é a *unidade imaginária* (que satisfaz a igualdade $i^2 = -1$) e $\ln x = \log_e x$, sendo x um número real positivo qualquer e e o número irracional chamado "*número de Euler*" (de valor aproximado 2,71828). Há, portanto, infinitos números complexos associados a $\log_{-2}(-8)$. No caso particular em que $m = 1$ e $n = 0$, obtemos: $\log_{-2}(-8) = (\ln 8 + 3\pi i)/(\ln 2 + \pi i) = (\ln 2^3 + 3\pi i)/(\ln 2 + \pi i) = (3\ln 2 + 3\pi i)/(\ln 2 + \pi i) = 3(\ln 2 + \pi i)/(\ln 2 + \pi i) = 3$. Ou seja, quando trabalhamos com funções de variáveis complexas, um dos resultados possíveis para $\log_{-2}(-8)$ é, justamente, 3. Muito bacana, não acha?! Agora, uma nota dentro da nota. Com $x > 0$, $\log_{-2}(-x) = (\ln x + (2m+1)\pi i)/(\ln 2 + (2n+1)\pi i)$ é um exemplo do que chamamos de *função multivalorada* (ou *função polivalente*), pois para cada $x > 0$ há infinitos valores para $\log_{-2}(-x)$: um para cada par $m, n \in \mathbb{Z}$. Parece ser uma ideia em contradição com o próprio conceito de função, pois sabemos que uma função associa cada elemento de um "conjunto de partida" a um único elemento de um "conjunto de chegada". Mas resolvemos isso de forma simples, no caso de uma função multivalorada: o conjunto de chegada é agora um conjunto de conjuntos! Pense a respeito.

[57] Isso é sempre possível, como podemos concluir analisando os tipos de gráfico de funções exponenciais (veja a Fig. 13).

É claro,
$$c_1 = \log_b a_1 \quad \text{e} \quad c_2 = \log_b a_2.$$
Segue que
$$a_1 a_2 = b^{c_1} b^{c_2} = b^{c_1+c_2},$$
e, portanto, o expoente ao qual devemos elevar a base b para obtermos o produto a_1a_2 é c_1+c_2; ou seja,
$$\log_b(a_1a_2) = c_1 + c_2 = \log_b a_1 + \log_b a_2,$$
e daí a igualdade (93). De modo muito semelhante, obtemos a igualdade (94) (fica como tarefa para você). Para obtermos a igualdade (95), observe que se $a = b^c$ - e daí $c = \log_b a$ -, então
$$a^\gamma = (b^c)^\gamma = b^{c\gamma},$$
e, portanto, o expoente ao qual devemos elevar a base b para obtermos a^γ é $c\gamma$; ou seja,
$$\log_b(a^\gamma) = c\gamma = \gamma c = \gamma \log_b a.$$

Vejamos alguns exemplos simples:

$$\underbrace{\underbrace{\log_2(4*8)}_{\log_2 32}}_{5} \overset{\text{usando (93)}}{\overset{\downarrow}{=}} \underbrace{\log_2 4}_{2} + \underbrace{\log_2 8}_{3}\;;$$

$$\underbrace{\underbrace{\log_2 \frac{32}{8}}_{\log_2 4}}_{2} \overset{\text{usando (94)}}{\overset{\downarrow}{=}} \underbrace{\log_2 32}_{5} - \underbrace{\log_2 8}_{3}\;;$$

$$\underbrace{\underbrace{\log_2 4^3}_{\log_2 64}}_{6} \overset{\text{usando (95)}}{\overset{\downarrow}{=}} \underbrace{3\log_2 4}_{3\cdot 2}\;.$$

Atividade 2-25: Convença-se de que podemos estender a propriedade expressa em (93) a um número n qualquer de fatores:
$$\log_b(a_1a_2\cdots a_n) = \log_b a_1 + \log_b a_2 + \cdots + \log_b a_n. \tag{96}$$

Atividade 2-26: Mostre que
$$\log_b \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\log_b a, \tag{97}$$
em que b é um número real positivo diferente de 1 e a é um número real positivo qualquer. Ao fazer isso, perceba que não é necessário memorizar este resultado.

Atividade 2-27: Digamos que desconhecemos os sinais de a_1 e a_2, mas sabemos que $a_1a_2 > 0$. Podemos seguramente escrever:
$$\log_b(a_1a_2) = \log_b|a_1a_2| = \log_b|a_1||a_2| = \log_b|a_1| + \log_b|a_2|;$$

ou seja,

$$a_1 a_2 > 0 \implies \log_b(a_1 a_2) = \log_b |a_1| + \log_b |a_2|. \tag{98}$$

Analogamente, mostre que

$$\frac{a_1}{a_2} > 0 \implies \log_b \frac{a_1}{a_2} = \log_b |a_1| - \log_b |a_2|, \tag{99}$$

e que

$$a^\gamma > 0 \implies \log_b(a^\gamma) = \gamma \log_b |a|. \tag{100}$$

Agora, vamos obter a importante *fórmula de mudança de base*

$$\log_b a = \frac{\log_\beta a}{\log_\beta b}, \tag{101}$$

sendo b e β dois números reais positivos diferentes de 1, e a um número real positivo qualquer. Comecemos expressando a como uma potência de base b:

$$a = b^c, \quad \text{e então } c = \log_b a. \tag{102}$$

Vamos reescrever a linha acima mudando a base de b para β (e o expoente de c para γ):

$$a = \beta^\gamma, \quad \text{e então } \gamma = \log_\beta a. \tag{103}$$

Queremos relacionar c e γ - ou seja, os expoentes de a quando expresso como potências de bases b e β, respectivamente. A sacada é a seguinte: sabemos que é fácil comparar potências quando a base é a mesma; então vamos mudar, na igualdade $a = b^c$, a base: de b para β. Para isso, basta escrevermos:

$$b = \beta^B, \quad \text{e então } B = \log_\beta b. \tag{104}$$

Combinando (102), (103) e (104), obtemos:

$$a = \beta^\gamma = b^c = (\beta^B)^c = \beta^{Bc} \implies \gamma = Bc \implies \log_\beta a = (\log_\beta b)(\log_b a),$$

de onde segue, imediatamente, a igualdade (101).

Um exemplo simples da validade da igualdade (101):

$$\underbrace{\log_4 64}_{3} = \left.\frac{\log_2 64}{\log_2 4}\right\} \frac{6}{2}.$$

Atividade 2-28: a) Logaritmos de base 10 são especialmente importantes, porque nosso sistema de numeração usual é o *sistema decimal*. Por isso, há uma notação especial para logaritmos de base 10:

$$\log x \equiv \log_{10} x; \tag{105}$$

ou seja, omitindo-se a base, ela é 10. Trata-se de uma convenção amplamente adotada, mas há autores que não fazem uso dela; então esteja atento, ou atenta. Contudo, muito provavelmente sua calculadora eletrônica (ou seu aplicativo de calculadora científica) faz uso desta notação. Faça um teste: veja se sua calculadora fornece

$$\log 1000 = 3.$$

b) Muito bem, digamos que sua calculadora só calcula logaritmos para duas bases: 10 e e (que é o já citado *número de Euler*, com o qual nos ocuparemos ainda nesta subseção 2.2.5). Como calcular, por exemplo, $\log_2 30$? Ora, fazendo uso da igualdade (101) obtemos

$$\log_2 30 = \frac{\log 30}{\log 2},$$

e calculando este quociente com uma calculadora obtemos (com uma aproximação de 10 casas decimais)

$$\log_2 30 \approx 4,9068905956.$$

Verifique. E para testar este resultado, use sua calculadora para obter:

$$2^{4,9068905956} \approx 29,9999999998.$$

A propósito, você pode dizer: certo, mas como uma calculadora calcula um logaritmo como $\log 30$ ou $\log 2$? Veremos isso na Parte II-C desta série; aguarde.

Atividade 2-29: Apenas como um treino de manipulação (pois não é realmente necessário memorizar os resultados a seguir, já que eles podem ser facilmente obtidos), mostre que

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b} \quad (a \text{ e } b \text{ positivos e diferentes de } 1), \tag{106}$$

e que

$$\log_{b^\gamma} a = \frac{1}{\gamma} \log_b a \quad (0 < b \neq 1, a > 0 \text{ e } \gamma \neq 0). \tag{107}$$

Funções logarítmicas (continuação)

Como vimos, antes de nossa revisão de logaritmos, uma função $f(x)$ é uma *função logarítmica de base b* se

$$f(x) = \log_b x, \qquad \text{com } 0 < b \neq 1 \quad \text{e} \quad x > 0,$$

e trata-se da inversa da função exponencial de base b, b^x (com $0 < b \neq 1$ e $x \in \mathbb{R}$). Portanto, o gráfico de $f(x) = \log_b x$ é simétrico ao gráfico de $f^{-1}(x) = b^x$, em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares. Mas sabemos que há dois tipos de gráfico de uma função exponencial de base b ($0 < b \neq 1$) (veja a Fig. 13): quando $b > 1$ e quando $0 < b < 1$. Há, portanto, dois tipos de gráfico de uma função logarítmica de base b: quando $b > 1$ e quando $0 < b < 1$. Mas, na física, quase sempre trabalhamos com funções logarítmicas de base 10, de base 2 e, principalmente, de base $e = 2,71828...$ (o *número de Euler*, como veremos logo adiante), e estes números são maiores que 1. Então, seguindo o estilo minimalista desta série, vamos analisar aqui apenas o tipo de gráfico de uma função logarítmica de base $b > 1$, está bem? É o tipo apresentado na Fig. 15. Trata-se de um "cartão de apresentação" da uma função logarítmica de base $b > 1$. Aliás, o gráfico de uma função simples é, com frequência, seu melhor cartão de apresentação, porque ele nos diz muito sobre ela.[58]

[58] Se ficou curioso ou curiosa sobre a forma do gráfico de uma função logarítmica de base b, com $0 < b < 1$,

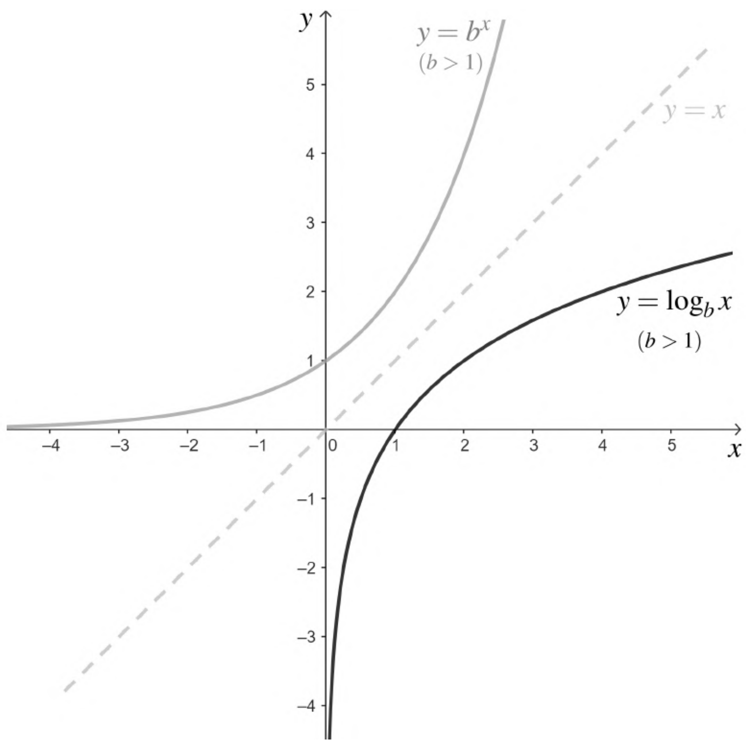


Figura 15: Tipo de gráfico de uma função logarítmica de base $b > 1$, e de sua inversa: uma função exponencial de base $b > 1$. (Para gerar estes dois gráficos, escolhemos $b = 2$.) Perceba que o gráfico de $f(x) = \log_b x$ (com $b > 1$) corta o eixo das abscissas no ponto $(1,0)$, independentemente do valor de b.

Há uma característica muito importante de uma função logarítmica de base $b > 1$: um crescimento extremamente lento, a partir de um determinado $x > 1$. Isso é fácil de ser percebido. Considere, por exemplo, a base 10. Temos a função $f(x) = \log x \equiv \log_{10} x$, para $x > 0$, e então $f(1) = 0,\ f(10) = 1,\ f(100) = 2,\ f(1000) = 3,\ f(10000) = 4,\ \ldots$. Percebe o crescimento extremamente lento? Foi necessário passarmos de $x = 1000$ para $x = 10000$ para o valor de $f(x)$ aumentar uma única unidade! E o crescimento vai ficando cada vez mais lento. Observe que para que $f(x)$ aumente mais uma unidade precisamos passar de $x = 10000$ para $x = 100000$. Mesmo no caso em que a base é menor - digamos, 2 -, o crescimento é muito lento, *a partir de um certo ponto*. Veja: $f(1) = 0$, $f(2) = 1$, $f(4) = 2$, $f(8) = 3$, $f(16) = 4$, $f(32) = 5, \ldots$. De início, não parece estar crescendo tão lentamente, mas veja que $f(1073741824) = 30$, o que é bem impressionante, não acha?

Nota sobre "crescimento exponencial"

O crescimento extremamente lento, *a partir de um certo ponto*, de uma função logarítmica de base $b > 1$ está, obviamente, relacionado ao crescimento extremamente rápido, também *a partir de um certo ponto*, de uma função exponencial de base $b > 1$, já que uma é a inversa da outra e, portanto, seus gráficos são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes 1 e 3. Mas

esboce o gráfico simétrico ao gráfico na Fig. 13b, em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares. Alternativamente (e com vantagens, como veremos), observe que se $0 < b < 1$, podemos definir $\tilde{b} \equiv 1/b > 1$, de modo que $b = \tilde{b}^{-1}$ e, portanto (veja (107)), $f(x) = \log_b x = \log_{\tilde{b}^{-1}} x = \frac{1}{-1} \log_{\tilde{b}} x = -\log_{\tilde{b}} x$. Assim, o gráfico de uma função logarítmica de base b, com $0 < b < 1$, é idêntico ao gráfico de uma função logarítmica de base $\tilde{b} = 1/b$ (sendo, portanto, $\tilde{b} > 1$), refletido em relação ao eixo x. (Veremos em detalhes essa questão de "reflexão" de gráficos de funções na Parte II-B desta série.) Por exemplo, o gráfico de $\log_{\frac{1}{4}} x$ é idêntico ao gráfico de $\log_4 x$, refletido em relação ao eixo x (ou seja, é idêntico ao gráfico de $-\log_4 x$). Verifique isso usando o Geogebra, ou outro programa de sua preferência.

devemos estar atentos para não fazermos mal uso da ideia de *crescimento exponencial* como um crescimento extremamente rápido. Em primeiro lugar, nem todo crescimento rápido é um crescimento exponencial. Por exemplo, se $y = x^{10}$, y cresce muito rapidamente com x, pois para $x = 1,2,3,4,5,\ldots$ temos, respectivamente, $y = 1,1024,59049,1048576,9765625,\ldots$, que é um crescimento bastante rápido, concorda? Além disso, nem todo crescimento exponencial b^x (com $b > 1$) é, já a partir de $x = 0$, muito rápido (e por isso usamos a expressão "*a partir de um certo ponto*", acima). Por exemplo, se $w = 2^x$ temos, para $x = 1,2,3,4,5,\ldots$, respectivamente $w = 2,4,8,16,32,\ldots$, que não dá, só com estes dados, para classificar como um crescimento bastante rápido, não é? Observe que, inicialmente, $w = 2^x$ cresce de forma bem mais lenta que $y = x^{10}$, mas, como mostraremos ao final da Parte II-B desta série, em algum ponto uma função exponencial b^x, de base $b > 1$, sempre "ultrapassa", definitivamente, uma função como $f(x) = x^n$, por maior que seja o valor de n (vamos explorar isso na Atividade 2-30). A partir de um certo ponto, uma função exponencial b^x, com $b > 1$, cresce de forma absurdamente rápida, mesmo que b esteja próximo de 1. Faça um teste no caso em que $b = 1{,}1$, com o uso do Geogebra e/ou de uma calculadora (e discuta com seus colegas, se possível).

Atividade 2-30: Usando o Geogebra (ou outro programa de sua preferência), trace os gráficos de $f(x) = x^{10}$ e $g(x) = 2^x$, para $x > 0$. Ficará claro que o gráfico de x^{10} "ultrapassa" o gráfico de 2^x próximo de $x = 1$, e rapidamente se distancia dele. Mas o gráfico de 2^x ultrapassa, em definitivo, o gráfico de x^{10} em algum ponto de abscissa entre $x = 58,77010$ e $x = 58,77011$. Verifique esta afirmativa com o uso de uma calculadora eletrônica, ou de algum outro recurso computacional. (Dica: examine o sinal da função $h(x) = x^{10} - 2^x$.)

Derivadas e antiderivadas de funções logarítmicas e de funções exponenciais

Finalmente, vamos introduzir as funções exponenciais e as funções logarítmicas em nosso estudo de cálculo diferencial e integral. Há, basicamente, duas formas de obtermos as derivadas dessas funções: primeiro calculando as derivadas das funções exponenciais e depois calculando as derivadas das funções logarítmicas com o que aprendemos na subseção 2.2.3 sobre como calcular a derivada de um função inversa, ou então primeiro calculando as derivadas das funções logarítmicas e depois calculando as derivadas das funções exponenciais com o que aprendemos na subseção 2.2.3. São dois caminhos válidos, mas nós, autores deste texto, gostamos mais deste último, porque nele o *número de Euler*, que desempenha papel central quando se fala em cálculo diferencial e integral com funções logarítmicas e funções exponenciais, aparece de forma mais natural, em nossa opinião. (Você pode pesquisar sobre o outro caminho possível, se for de seu interesse.)[59]

Muito bem, partindo da definição de derivada,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

obtemos, com $f(x) = \log_b x$ ($0 < b \neq 1$ e $x > 0$):

$$[\log_b x]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_b(x+\Delta x) - \log_b x}{\Delta x}.$$

Faremos, agora, uma série de manipulações que irão nos levar a um lugar muito interessante. Observe, no caminho, o uso de propriedades básicas da logaritmação (que revisamos nesta subseção 2.2.5). Vamos lá:

[59]Se você tem pressa em obter as derivadas e antiderivadas das funções exponenciais, passe às atividades 2-43, 2-44 e 2-45 logo após a realização da Atividade 2-31.

$$\begin{aligned}
[\log_b x]' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_b(x+\Delta x)-\log_b x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{\Delta x}\log_b\frac{x+\Delta x}{x}\right] \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{\Delta x}\log_b\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right] = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{x}\frac{x}{\Delta x}\log_b\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right].
\end{aligned}$$

É uma pequena sacada reescrever, acima, $1/\Delta x$ como $(1/x)(x/\Delta x)$ (lembrando que temos, em uma função exponencial, $x > 0$). Veremos a importância disso logo a seguir. Continuando: como o fator $1/x$ se mantém constante, ao fazermos Δx tender a 0, podemos “movê-lo através do símbolo de limite” (Silva & Peixoto 2020). Temos, então:

$$\begin{aligned}
[\log_b x]' &= \frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{x}{\Delta x}\log_b\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right] = \frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\left[\log_b\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\right] \\
&= \frac{1}{x}\log_b\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\right].
\end{aligned}$$

Conhecendo bem a função logarítmica (de base b), procure se convencer da validade desta última igualdade (assumindo, por enquanto, que este último limite existe). Podemos definir $u \equiv \Delta x/x$, e reescrever:

$$[\log_b x]' = \frac{1}{x}\log_b\left[\lim_{u\to 0}(1+u)^{1/u}\right]. \tag{108}$$

Mas a questão é: o limite acima realmente existe? Ou seja, quando u tende a zero, $(1+u)^{1/u}$ tende a um certo número? E se tende, que número é esse?

Vamos fazer uma investigação numérica. Usando uma calculadora eletrônica, ou algum aplicativo, podemos construir a Tabela 4 (imprimimos 10 casas decimais, sem arredondamentos - exceto pela linha central, que não resulta de um cálculo direto, pois, é claro, não podemos fazer $u = 0$ em $(1+u)^{1/u}$). Esta tabela parece indicar que quando u tende a 0, $(1+u)^{1/u}$ tende a um número e que, com cinco casas decimais, tem valor aproximado 2,71828.[60] Trata-se do chamado *número de Euler*, que analisaremos com maior profundidade mais adiante. Podemos então reescrever (108) como

$$[\log_b x]' = \frac{1}{x}\log_b e, \tag{109}$$

em que

$$\boxed{e \equiv \lim_{u\to 0}(1+u)^{1/u} \approx 2{,}71828. \quad \text{(Número de Euler)}} \tag{110}$$

Temos em (109), portanto (com e definido em (110)), a derivada de uma função logarítmica de base b. Contudo, esta não é a expressão tipicamente usada (e por isso não a colocamos em uma caixa). Ficará claro a seguir.

Perceba que de todas as infinitas funções logarítmicas de base b (com $0 < b \neq 1$), uma possui uma derivada particularmente simples: aquela de base $b = e$, pois $\log_e e = 1$, e, portanto,

$$[\log_e x]' = \frac{1}{x}. \tag{111}$$

[60] Perceba que os algarismos sublinhados, na Tabela 4, nos ajudam a chegar a esta conclusão; afinal, pelas tendências reveladas pela tabela, o limite e deve ser maior que $2{,}71828\underline{04690}$ e menor que $2{,}71828\underline{31876}$. Como estes dois valores são arredondados para 2,71828, com cinco casas decimais, podemos concluir que este é o valor aproximado de e, com cinco casas decimais.

Assim como há uma notação especial para o logaritmo de x na base 10, que é $\log x$,[61] há uma notação especial para o logaritmo de x na base e: $\ln x$ (lemos "ln de x").[62] Ou seja,

$$\ln x \equiv \log_e x, \tag{112}$$

e chamamos um logaritmo na base e de "*logaritmo natural*". Com esta notação, podemos reescrever a igualdade (111) como

$$\boxed{[\ln x]' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)\,.} \tag{113}$$

u	$(1+u)^{1/u}$
$0,1$	2,5937424601...
$0,01$	2,7048138294...
$0,001$	2,7169239322...
$0,0001$	2,7181459268...
$0,00001$	2,7182682371...
$0,000001$	2,7182$\underline{804690}$...
$\downarrow$	$\downarrow$
0	$e = 2,71828\ldots$
$\uparrow$	$\uparrow$
$-0,000001$	2,7182$\underline{831876}$...
$-0,00001$	2,7182954199...
$-0,0001$	2,7184177550...
$-0,001$	2,7196422164...
$-0,01$	2,7319990264...
$-0,1$	2,8679719907...

Tabela 4: Uma aproximação numérica para o número de Euler.

Atividade 2-31: O resultado em (109) não precisa ser memorizado; apenas a igualdade (113). Fazendo uso de fórmula de mudança de base, em (101), e da igualdade (113), mostre que

$$\boxed{[\log_b x]' = \frac{1}{x \ln b} \quad (0 < b \neq 1 \;\text{ e }\; x > 0),} \tag{114}$$

e que esta expressão corresponde àquela em (109). Entenda que o resultado em (114) também não precisa ser memorizado, já que pode ser imediatamente obtido combinando-se a igualdade (113) com a fórmula de mudança de base, em (101). Resolvemos colocá-lo em destaque por se tratar de um resultado importante.

Atividade 2-32: Usando um aplicativo como o Geogebra, trace, no mesmo sistema de coordenadas, os gráficos $\ln x$ e de $1/x$, com $x > 0$. Em seguida, observe que o gráfico da segunda função está de acordo com o que se espera para a derivada da primeira função.

Atividade 2-33: Calcule as derivadas das funções abaixo, considerando A uma constante não nula e a uma constante positiva.[63] Nos itens **b** a **f**, faça isso inicialmente *com*, e depois *sem* o

[61] Mas esta notação não é universal; lembre-se disso. Por exemplo, na biblioteca *math*, da linguagem de programação C, $\log(x)$ é a função que retorna o logaritmo de x na base e, em vez de na base 10.

[62] Esta notação também não é universal, mas é a mais usada na física.

[63] O item **a** é particularmente importante. Por quê? Você saberá, calculando a derivada daquela função. Discutiremos mais adiante o resultado que você obterá, mas você já pode dar a ele uma atenção especial.

uso da regra da cadeia.

a) $f(x) = x\ln x - x \quad (x > 0)$ **b)** $f(x) = A\ln(ax) \quad (a > 0 \text{ e } x > 0)$

c) $f(x) = A\ln\frac{a}{x} \quad (a > 0 \text{ e } x > 0)$ **d)** $f(x) = A\ln(ax^2) \quad (a > 0 \text{ e } x \neq 0)$

e) $f(x) = A\ln\frac{a}{x^2} \quad (a > 0 \text{ e } x \neq 0)$ **f)** $f(x) = A\ln\sqrt{ax} \quad (a > 0 \text{ e } x > 0)$

Atividade 2-34: a) Convença-se de que segue imediatamente da igualdade (113) este importante resultado:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0) \quad \Longrightarrow \quad F(x) = \ln x + C,} \tag{115}$$

em que C é uma constante arbitrária. A restrição $x > 0$ para a função $f(x) = 1/x$ é necessária, na relação de implicação em (115), porque a função $\ln x$ só está definida (trabalhando-se com números reais) para $x > 0$. (Na Atividade 2-37 obteremos as antiderivadas de $1/x$ apenas com a restrição $x \neq 0$. Ou seja, consideraremos, além de $x > 0$, também $x < 0$ na função $1/x$.)

b) Calcule a seguinte integral definida: $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

c) Mostre que

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln x \quad (x > 0). \tag{116}$$

d) Sabemos que se $0 < x < 1$ então $\ln x < 0$ (veja a Fig. 15b, considerando, lá, $b = e$). Mostre que a integral no membro esquerdo de (116) nos dá um número negativo, se $0 < x < 1$. Faça isso, é claro, sem fazer uso do membro direito.

O resultado em (116) é muito interessante. Ele pode ser usado, com uma *integração numérica* do membro esquerdo[64] (escolhido um valor positivo para x), para um *cálculo numérico* de $\ln x$ (e, consequentemente, de qualquer logaritmo, pois $\log_b x = (\ln x)/(\ln b)$ - veja (101)).[65] Mas o que é mais impressionante é que ele pode ser usado, se lido da direita para a esquerda, como uma definição alternativa para a função $\ln x$, sem qualquer referência a expoentes! Ou seja, podemos definir:

$$\ln x \equiv \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \quad (x > 0). \tag{117}$$

É claro, neste caso o termo "logaritmo" não teria, *a priori*, relação com expoentes (e, portanto, poderia ser substituído, junto com a notação "$\ln x$"), mas saiba que, tecnicamente, este é um início possível para o desenvolvimento das funções logarítmicas reais (e, em seguida, das funções exponenciais como inversas das funções logarítmicas). Por exemplo, é possível provar que da definição em (117) decorrem as seguinte propriedades:

$$\ln(a_1 a_2) = \ln a_1 + \ln a_2, \tag{118}$$

$$\ln\frac{a_1}{a_2} = \ln a_1 - \ln a_2, \tag{119}$$

$$\ln(a^\gamma) = \gamma \ln a, \tag{120}$$

em que a_1, a_2 e a são números reais positivos quaisquer, e γ é um número real qualquer. Pesquise a respeito, se for de seu interesse. Apenas para satisfazer os leitores mais curiosos,

[64]Estudaremos *integração numérica* na Parte III desta série.

[65]Não estamos dizendo, contudo, que uma integração numérica do membro esquerdo de (116) é o modo mais interessante de se calcular logaritmos numericamente. Voltaremos a essa discussão na Parte III desta série, e faremos uso do que você terá estudado sobre *séries infinitas* na Parte II-C.

apresentaremos a seguir como obter a igualdade (118) a partir da definição em (117). Trata-se de um desenvolvimento com algumas pequenas sacadas, que esperamos que você identifique e aprecie.

Como preliminar, convença-se da validade da seguinte igualdade:

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t,$$

sendo $f(t)$ uma função bem comportada nos intervalos de integração acima. (Trata-se de um resultado intuitivo, mas, se preferir, demonstre-o fazendo uso do *teorema fundamental do cálculo*.)[66] Muito bem, a partir de (117) temos, com a_1 e a_2 positivos:

$$\ln(a_1 a_2) = \int_1^{a_1 a_2} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Podemos reescrever:

$$\ln(a_1 a_2) = \int_1^{a_1 a_2} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \overbrace{\int_1^{a_1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}^{\ln a_1} + \int_{a_1}^{a_1 a_2} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t. \qquad (121)$$

Definindo $s \equiv t/a_1$, temos $t = a_1 s$, $\mathrm{d}t = a_1 \mathrm{d}s$, e então

$$\frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{\cancel{a_1}\mathrm{d}s}{\cancel{a_1}s} = \frac{\mathrm{d}s}{s}.$$

Além disso,

$$t = a_1 \implies s = 1 \qquad \text{e} \qquad t = a_1 a_2 \implies s = a_2.$$

Segue que

$$\int_{a_1}^{a_1 a_2} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{a_2} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = \ln a_2. \qquad (122)$$

Substituindo (122) em (121), obtemos (118). Uma beleza, não acha?

Atividade 2-35: Calcule as integrais definidas abaixo. (Na aplicação do *teorema fundamental do cálculo*, obtenha as antiderivadas por inspeção.)

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{5}{x}\,\mathrm{d}x$ **b)** $\displaystyle\int_1^2 \frac{5}{-4x+10}\,\mathrm{d}x$ **c)** $\displaystyle\int_1^2 \frac{5}{4x-10}\,\mathrm{d}x$

Vamos fazer algumas observações, antes de passarmos ao item **d**. Leia essas observações apenas após ter calculado (ou ao menos ter tentado calcular) as três integrais acima, tá certo? Muito bem, no item **b** você deve ter obtido, por inspeção, a seguinte antiderivada do integrando: $-\frac{5}{4}\ln(-4x+10)$. Isso está correto. Mas você teve o cuidado de analisar se temos, dentro dos limites de integração (ou seja, para $1 \leq x \leq 2$), $-4x+10 > 0$? Sim, temos; mas essa verificação é importante porque, do contrário, a função $-\frac{5}{4}\ln(-4x+10)$ não estaria definida para $1 \leq x \leq 2$. No item **c**, podemos tentar, por inspeção, a seguinte antiderivada para o integrando: $\frac{5}{4}\ln(4x-10)$.

[66] Reveja o Exercício 44 do primeiro texto deste projeto (Silva & Peixoto 2020).

De fato, $[\frac{5}{4}\ln(4x-10)]' = 5/(4x-10)$. Contudo, para $1 \leq x \leq 2$ temos $4x-10<0$, e, portanto, a função $\frac{5}{4}\ln(4x-10)$ não está definida para $1 \leq x \leq 2$. Veja o que obteríamos (incorretamente):

$$\int_1^2 \frac{5}{4x-10}\,\mathrm{d}x \overbrace{=}^{\text{incorreto}} \frac{5}{4}\ln(4x-10)\Big|_1^2 = \frac{5}{4}\left[\overbrace{\ln(-2)}^{\text{não existe, nos reais}} - \overbrace{\ln(-6)}^{\text{não existe, nos reais}}\right]. \tag{123}$$

Entenda que $\frac{5}{4}\ln(4x-10)$ é, sim, uma antiderivada de $5/(4x-10)$, mas apenas para os valores de x em que ela está definida, e ela não está definida para $1 \leq x \leq 2$. (A função $\frac{5}{4}\ln(4x-10)$ está definida para todo x tal que $4x-10>0$ - ou seja, para $x>5/2$.) Então *não basta obtermos uma antiderivada do integrando; essa antiderivada precisa estar definida no intervalo de integração*. Há, basicamente, duas formas de resolvermos este problema. Uma delas, veremos com a realização da Atividade 2-38. A outra forma envolve uma pequena sacada. Podemos reescrever:

$$\int_1^2 \frac{5}{4x-10}\,\mathrm{d}x = -\int_1^2 \frac{5}{-4x+10}\,\mathrm{d}x,$$

e daí as contas seguem sem problemas. De fato, esta última integral é a que calculamos no item **b**, e, portanto, a resposta para o item **c** é a resposta para o item **b** multiplicada por -1. Calcule, agora, as integrais nos itens **d**, **e** e **f**.

d) $\displaystyle\int_a^b \frac{A}{Bx+C}\,\mathrm{d}x$, em que a única restrição sobre as constantes a e b é que $b>a$, A é uma constante qualquer, e B e C são constantes tais que $B \neq 0$ e temos, no intervalo de integração $[a,b]$, $Bx+C>0$.

e) $\displaystyle\int_a^b \frac{A}{Bx+C}\,\mathrm{d}x$, em que a única restrição sobre as constantes a e b é que $b>a$, A é uma constante qualquer, e B e C são constantes tais que $B \neq 0$ e temos, no intervalo de integração $[a,b]$, $Bx+C<0$ (esta desigualdade é o que torna este item diferente do anterior).

f) $\displaystyle\int_a^b \frac{A}{Bx+C}\,\mathrm{d}x$, em que a única restrição sobre as constantes a e b é que $b>a$, A é uma constante qualquer, e B e C são constantes tais que $B \neq 0$ e temos, no intervalo de integração $[a,b]$, $Bx+C \neq 0$.

(Dica para o item **f**, e observação adicional: perceba que se $Bx+C \neq 0$ para $a \leq x \leq b$, temos $Bx+C<0$ no intervalo de integração $[a,b]$ inteiro, ou então $Bx+C>0$ no intervalo de integração $[a,b]$ inteiro. Ou seja, se $Bx+C \neq 0$ para $a \leq x \leq b$, não podemos ter $Bx+C<0$ em uma parte do intervalo $[a,b]$ e $Bx+C>0$ em outra parte desse intervalo, porque o gráfico da função $g(x) = Bx+C$ necessariamente cortaria o eixo x, e aí teríamos, para algum $x \in [a,b]$, $Bx+C=0$, concorda? A exigência de termos $Bx+C \neq 0$ é esperada, pois o integrando $A/(Bx+C)$, acima, não está definido para x tal que $Bx+C=0$ (ou seja, para $x=-C/B$), e o teorema fundamental do cálculo exige que o integrando seja uma função contínua no intervalo de integração (Silva & Peixoto 2020).)

A Atividade 2-35 mostra como nós, físicos, devemos ser cuidadosos ao realizarmos cálculos matemáticos. Em geral, não precisamos ter preocupações com rigor ao nível dos matemáticos (a menos, por exemplo, que você queira se tornar um físico-matemático ou uma física-matemática), mas é importante termos um nível de cuidado mínimo para tentarmos não cometer erros grosseiros. Sem falar que é prazeroso nos sentirmos seguros com os cálculos que realizamos, não acha? É inquietante (ou deveria ser, em nossa opinião) aquela sensação de que um cálculo que realizamos pode estar grosseiramente errado... É claro, cometemos erros, mas devemos nos esforçar para confiar nos cálculos que realizamos. Isso ajuda até mesmo a corrigir um erro, quando ele é identificado. O desenvolvimento em (123) acusa um erro, porque nos leva a logaritmos de números negativos, e daí temos a chance de revisar os cálculos. Mas a situação é um pouco mais complicada quando o desenvolvimento leva a um resultado que parece estar correto - ao menos a um olhar desatento. Por exemplo, considere a seguinte integral:

$$\int_{-2}^{4} \frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x. \tag{124}$$

Digamos que alguém escreva:

$$\int_{-2}^{4} \frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^2-1)\Big|_{-2}^{4} = \frac{1}{2}[\ln 15 - \ln 3] = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{15}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln 5. \tag{125}$$

Este desenvolvimento está incorreto. Em primeiro lugar, observe que o integrando não está definido para $x = \pm 1$, e estes dois pontos estão no intervalo de integração $[-2,4]$. (Com um aplicativo como o Geogebra, trace o gráfico de $f(x) = x/(x^2-1)$ e, adicionalmente, as duas retas verticais de equações $x = 1$ e $x = -1$.) O teorema fundamental do cálculo tem validade geral quando o integrando é uma função contínua no intervalo de integração (Silva & Peixoto 2020), e a função $f(x) = x/(x^2-1)$ não é contínua no intervalo de integração $[-2,4]$ - pois não está definida para $x = \pm 1$. Mesmo assim - como veremos na Parte II-B desta série - a integral em (124) poderia *convergir* para um determinado número real; mas ela não converge (você entenderá por que ao estudar a subseção *integrais impróprias* da Parte II-B). Observe, adicionalmente, que a função $F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2-1)$ é uma antiderivada do integrando, $f(x) = x/(x^2-1)$, mas não está definida para $x^2 - 1 \leq 0$ - ou seja, para $-1 \leq x \leq 1$ -, e o intervalo $[-1,1]$ está contido no intervalo de integração $[-2,4]$. Agora, vamos mudar o limite de integração inferior de -2 para 2. Com isso, evitamos o intervalo $[-1,1]$, e então está correto escrevermos:

$$\int_{2}^{4} \frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^2-1)\Big|_{2}^{4} = \frac{1}{2}[\ln 15 - \ln 3] = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{15}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln 5. \tag{126}$$

Se a pessoa calcula integrais de forma "mecânica", sem atenção a esses detalhes, não distingue o desenvolvimento em (125) daquele em (126).

Vamos colocar em destaque o resultado final obtido com a realização da Atividade 2-35:

$$\boxed{\int_{a}^{b} \frac{A}{Bx+C}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{B}\ln\left(\frac{Bb+C}{Ba+C}\right), \quad \text{se } Bx+C \neq 0 \text{ para } a \leq x \leq b.} \tag{127}$$

Este resultado foi posto em destaque porque se aplica a cada um dos itens da Atividade 2-35 (como um exercício, aplique-o às integrais nos itens **a**, **b** e **c**; vale a pena). Mas tal resultado não precisa ser memorizado. Realizando a Atividade 2-38, você aprenderá a obtê-lo de forma mais direta, sempre que precisar.

Agora, faremos uma discussão envolvendo *análise dimensional*. Na Atividade 2-8 afirmamos que o argumento da função cosseno deve ser adimensional, pois uma expressão como cos(π segundos), por exemplo, não faz sentido. Assim, em uma expressão como $\cos(\omega t)$, em que t é tempo, a constante ω necessariamente tem dimensão de inverso de tempo, para que o produto ωt seja adimensional. Podemos fazer afirmações semelhantes para as demais funções trigonométricas (seno, tangente, secante, cossecante e cotangente), e suas inversas. Por exemplo, seriam igualmente sem sentido expressões como sen$(\pi/2$ metros) e arcsen(1 segundo). Mas e quanto às funções exponenciais? Também é fácil ver que seus argumentos (que são expoentes) devem ser, necessariamente, adimensionais. Por exemplo, o que poderia significar $2^{3\,\text{segundos}}$, ou $(4\,\text{segundos})^{2\,\text{metros}}$? No caso das funções logarítmicas, uma análise apressada poderia nos levar a concluir - equivocadamente - que podemos dar significado a argumentos dimensionais, com bases também dimensionais. Poderíamos dizer, por exemplo, que com $b = 2\,$metros temos $\log_b(8\,\text{m}^3) = \log_{2\,\text{m}}(8\,\text{m}^3) = 3$, pois $(2\,\text{m})^3 = 8\,\text{m}^3$, e aí teríamos a função $\log_{2\,\text{m}} V$, sendo V um volume. Contudo, vejamos o que essa função retornaria para $V = 16\,\text{m}^3$: $\log_{2\,\text{m}} V = \log_{2\,\text{m}} 16\,\text{m}^3 =$?! Não há nada que escrevamos aqui que faça sentido. Se escrevermos $\log_{2\,\text{m}} 16\,\text{m}^3 = 4$, estaremos dizendo que $(2\,\text{m})^4 = 16\,\text{m}^3$ - o que, obviamente, está incorreto. Se escrevermos $\log_{2\,\text{m}} 16\,\text{m}^3 = 3$, estaremos dizendo que $(2\,\text{m})^3 = 16\,\text{m}^3$ - o que também está incorreto. Ou seja, não temos como obter, conjuntamente, o número e a unidade corretos. Assim, para $b = 2\,$metros, $\log_{2\,\text{m}} V$ (sendo V um volume) só faz algum sentido no caso em que $V = 8\,\text{m}^3$ - o que seria muito restritivo, concorda? Portanto, *os argumentos de funções logarítmicas e exponenciais - assim como os de funções trigonométricas e trigonométricas inversas - devem ser, necessariamente, adimensionais*. Contudo, como você verá realizando a Atividade 2-36 e acompanhando a discussão subsequente, às vezes *parece* que, na física, calculamos logaritmos de quantidades que não são adimensionais!

Atividade 2-36: A Fig. 16 ilustra um deslocamento infinitesimal dx, em um intervalo de tempo dt a partir de um certo instante t, de um pistão, devido a uma expansão de um gás. Suponha que no instante t o gás possui pressão P, volume V e temperatura absoluta T.

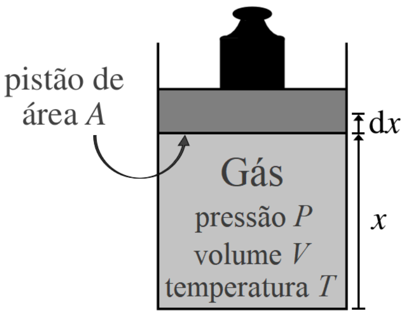


Figura 16: Atividade 2-36.

a) Sabendo que o pistão tem área de seção transversal A, e lembrando do conceito de pressão, calcule o módulo F da força que o gás exerce sobre o pistão, no instante t.
b) Mostre que o trabalho $\mathrm{d}W = F\mathrm{d}x$ que o gás realiza sobre o pistão,[67] no intervalo de tempo dt, pode ser expresso como $\mathrm{d}W = P\mathrm{d}V$, em que d$V$ é a variação infinitesimal do volume do gás, no intervalo de tempo dt.
c) Agora, considerando que se trata de um *gás ideal* (um modelo para um gás suficientemente rarefeito), que obedece à *equação de estado*

$$PV = nRT,$$

[67] Na mecânica, dizemos "*trabalho realizado por uma força*", ou, simplesmente, "*trabalho de uma força*", mas no jargão da termodinâmica é comum usarmos a expressão "*trabalho realizado por um gás*". Tecnicamente, trata-se do trabalho realizado por uma força exercida por um gás.

conhecida como *lei dos gases ideais*, em que n é o número de mols de moléculas (ou átomos, no caso de um gás ideal monoatômico) e R é uma constante denominada *constante universal dos gases*, expresse o trabalho $\mathrm{d}W$ em termos de T e V, em vez de P e V.
d) Supondo, adicionalmente, que se trata de uma *expansão isotérmica* - ou seja, que a temperatura do gás se mantém constante enquanto ele se expande -, calcule o trabalho W realizado pelo gás quando seu volume passa de um valor V_1 para um valor maior V_2. Expresse sua resposta como

$$W = nRT\ln\frac{V_2}{V_1}. \tag{128}$$

Muito bem, na expressão em (128) temos um logaritmo de uma quantidade adimensional: V_2/V_1. Está correto. Contudo, como você chegou àquele resultado? Em alguma parte da realização da atividade você expressou o logaritmo de uma quantidade dimensional? (Não leia o que vem a seguir, se você ainda não realizou a Atividade 2-36.)

Vamos apresentar, abaixo, os cálculos relativos à Atividade 2-36, como você provavelmente os fez (a menos, talvez, de pequenas variações; e não faremos separação por item).

$$\mathrm{d}W = \overbrace{F}^{PA}\mathrm{d}x = P\overbrace{A\mathrm{d}x}^{\mathrm{d}V} = P\mathrm{d}V = \frac{nRT}{V}\mathrm{d}V = nRT\frac{\mathrm{d}V}{V} \implies W = \int_{V_1}^{V_2} nRT\frac{\mathrm{d}V}{V}.$$

Como estamos considerando T constante, podemos por o fator nRT "em evidência" (ou seja, à esquerda do sinal de integração):

$$W = nRT\int_{V_1}^{V_2}\frac{\mathrm{d}V}{V}.$$

Chegamos a um ponto crítico. Você provavelmente escreveu, a partir da expressão acima (ou de uma expressão equivalente), algo semelhante a

$$W = nRT\int_{V_1}^{V_2}\frac{\mathrm{d}V}{V} = nRT\ln V\Big|_{V_1}^{V_2} = nRT\left(\ln V_2 - \ln V_1\right) = nRT\ln\frac{V_2}{V_1}, \tag{129}$$

tendo usado, nesta última igualdade, a propriedade do logaritmo do quociente. Mas nas expressões $\ln V$ e $\ln V_2 - \ln V_1$ temos logaritmos de quantidades dimensionais! E sabemos que isso está incorreto!

Então o que há de errado no desenvolvimento acima? O resultado final, em (129), está correto, e não envolve nenhum logaritmo de uma quantidade dimensional, mas para chegar a ele precisamos, realmente, passar por expressões envolvendo logaritmos de quantidades dimensionais?

A resposta é: não, não precisamos. A sacada é que podemos reescrever a quantidade $\mathrm{d}V/V$ em (129), que é adimensional, como

$$\frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{\mathrm{d}V/V_\mathrm{u}}{V/V_\mathrm{u}},$$

em que V_u é o *volume unitário com a mesma unidade escolhida para* V. (Por exemplo, se $V = 2\,\mathrm{m}^3$, temos $V_\mathrm{u} = 1\,\mathrm{m}^3$, e, portanto, $V/V_\mathrm{u} = 2$; se $V = 2\times 10^9\,\mathrm{mm}^3$, temos $V_\mathrm{u} = 1\,\mathrm{mm}^3$, e, portanto, $V/V_\mathrm{u} = 2\times 10^9$.) Definindo

$$V_\mathrm{N} \equiv V/V_\mathrm{u}, \tag{130}$$

que é *numericamente igual* ao volume V, *na unidade escolhida*, e é adimensional, podemos escrever, adicionalmente:

$$\frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{\mathrm{d}V/V_\mathrm{u}}{V/V_\mathrm{u}} = \frac{\mathrm{d}V_\mathrm{N}}{V_\mathrm{N}}, \tag{131}$$

pois[68]

$$\frac{\mathrm{d}V}{V_\mathrm{u}} = \mathrm{d}\left(\frac{V}{V_\mathrm{u}}\right) = \mathrm{d}V_\mathrm{N}.$$

Usando (131), podemos então reescrever o desenvolvimento em (129) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} W &= nRT\int_{V_1}^{V_2}\frac{\mathrm{d}V}{V} = nRT\int_{V_{\mathrm{N}1}}^{V_{\mathrm{N}2}}\frac{\mathrm{d}V_\mathrm{N}}{V_\mathrm{N}} = nRT\ln V_\mathrm{N}\Big|_{V_{\mathrm{N}1}}^{V_{\mathrm{N}2}} = nRT\left(\ln V_{\mathrm{N}_2} - \ln V_{\mathrm{N}_1}\right) \\ &= nRT\ln\frac{V_{\mathrm{N}2}}{V_{\mathrm{N}1}} = nRT\ln\frac{V_2}{V_1}, \end{aligned} \tag{132}$$

pois (veja (130))

$$\frac{V_{\mathrm{N}2}}{V_{\mathrm{N}1}} = \frac{V_2/\cancel{V_\mathrm{u}}}{V_1/\cancel{V_\mathrm{u}}} = \frac{V_2}{V_1}.$$

No desenvolvimento em (132) estamos livres do problema de tomarmos o logaritmo de uma quantidade dimensional. Contudo, saiba que, na prática, muitos físicos não escrevem assim, como em (132), mas como em (129), mesmo. É uma espécie de abuso que nós nos permitimos, para simplificar a escrita, já que a expressão final estará correta. Mas se isso lhe incomoda, escreva como em (132), ou então escreva, diretamente (em nossa opinião, a melhor opção):

$$W = nRT\int_{V_1}^{V_2}\frac{\mathrm{d}V}{V} = nRT\ln\frac{V_2}{V_1};$$

ou seja, não expresse o logaritmo de uma quantidade dimensional, mas - por concisão - omita a parte central do desenvolvimento em (132).

Atividade 2-37: Considere a função $f(x) = \ln|x|$.
a) Qual é o seu domínio? Ou seja, para que valores de x ela está (implicitamente) definida?
b) Mostre que[69]

$$\boxed{[\ln|x|]' = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0).} \tag{133}$$

(Dica: no caso em que $x < 0$, faça uso da igualdade $|x| = -x$, e da regra da cadeia.)
c) Perceba que segue imediatamente da igualdade (133) este importante resultado:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \quad \Longrightarrow \quad F(x) = \ln|x| + C,} \tag{134}$$

em que C é uma constante arbitrária.[70]
d) Usando um aplicativo como o Geogebra, trace, no mesmo sistema de coordenadas, os gráficos

[68]Para entender bem a igualdade $\mathrm{d}V/V_\mathrm{u} = \mathrm{d}(V/V_\mathrm{u})$, pense $\mathrm{d}V$ como um ΔV infinitesimal, e lembre-se que V_u é constante. Você escreverá esse tipo de igualdade facilmente após ter estudado as *regras para o cálculo de diferenciais*, na Parte II-B desta série.

[69]Compare com a igualdade (113). Lá, está implícito, temos $x > 0$, pois $\ln x$ só está definida para $x > 0$.

[70]Observe, adicionalmente, que de certo modo este resultado vem preencher uma lacuna que havia na regra da potência para o cálculo de antiderivadas - expressa em (39): para $n = -1$.

$\ln|x|$ e de $1/x$, com $x \neq 0$. Em seguida, observe que o gráfico da segunda função está de acordo com o que se espera para a derivada da primeira função. (Dê especial atenção à região $x < 0$, pois você já considerou a região $x > 0$ ao realizar a Atividade 2-32.)

O resultado em (134) merece uma atenção especial. Em primeiro lugar, perceba que o resultado em (115) é um caso particular daquele em (134), pois para $x > 0$ temos $|x| = x$. Mesmo assim, não devemos desprezar o resultado em (115), pois se em um certo problema precisamos integrar a função $f(x) = 1/x$ em um determinado intervalo $[a,b]$ que está na região $x > 0$, podemos usar o resultado em (115), em vez daquele em (134), concorda? Ou seja, não há necessidade de escrevermos $|x|$, em vez de x, se $x > 0$. Ficaria até estranho, talvez - embora não incorreto. (Por exemplo, reveja o desenvolvimento em (132), em que é integrada a função $1/V_{\text{N}}$. Lá não escrevemos uma antiderivada de $1/V_{\text{N}}$ como $\ln|V_{\text{N}}|$, mas como $\ln V_{\text{N}}$ - o que está correto, já que V_{N} é sempre positivo.) Contudo, se precisamos integrar a função $f(x) = 1/x$ em um determinado intervalo $[a,b]$ que está na região $x < 0$, o resultado em (115) não se aplica, e aí realmente precisamos fazer uso do resultado em (134), entende? Veremos um exemplo disso na Atividade 2-38, e outro na Atividade 2-39. Agora, vejamos a diferença entre os resultados em (115) e (134) por uma perspectiva ligeiramente diferente. A função $f(x) = 1/x$ só não está definida, no conjunto dos números reais, para $x = 0$. Faz sentido nos perguntarmos: quais são suas antiderivadas? A resposta, sem a restrição de que $x > 0$, está em (134), não em (115).

Atividade 2-38: a) Calcule

$$\int_{1}^{4} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad \int_{-4}^{-1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Perceba a necessidade do resultado em (134) para o cálculo direto da segunda integral, enquanto o resultado em (115) é suficiente para o cálculo da primeira.[71] Adicionalmente, observe que não podemos integrar a função $f(x) = 1/x$ em um intervalo $[a,b]$ ao qual pertença o número 0, pois $f(x) = 1/x$ não está definida para $x = 0$, e o *teorema fundamental do cálculo* só se aplica a funções contínuas no intervalo de integração (Silva & Peixoto 2020).

b) Agora, fazendo uso do resultado em (134), obtenha o resultado em (127). (Dica: na parte final de seus cálculos, justifique a passagem da expressão $|(Bb+C)/(Ba+C)|$ para a expressão $(Bb+C)/(Ba+C)$. Se necessário, revise a "dica para o item **f**" da Atividade 2-35.)

c) Como um caso particular importante, observe que

$$\boxed{\int_{a}^{b} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{b}{a}, \quad \text{se } 0 \notin [a,b].} \tag{135}$$

O que é importante observar neste resultado é que não precisamos escrever $\ln|b/a|$, *ao final; apenas* $\ln(b/a)$. Veja, em detalhes (refazendo as contas do item **b** para este caso particular):

$$\int_{a}^{b} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x|\Big|_{a}^{b} = \ln|b| - \ln|a| = \ln\frac{|b|}{|a|} = \ln\left|\frac{b}{a}\right| = \ln\frac{b}{a}.$$

Para entender esta última igualdade, observe que, como o número 0 não pertence ao intervalo $[a,b]$, os sinais de a e b são iguais, e, portanto, a razão b/a é positiva - e daí $|b/a| = b/a$.

[71] Podemos calcular a segunda integral usando o resultado em (115), mas de uma forma indireta: basta percebermos, com o auxílio do gráfico de $f(x) = 1/x$, que $\int_{-4}^{-1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\int_{1}^{4} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

Atividade 2-39: Considere que uma partícula de massa m se move ao longo do eixo x e está sujeita à ação de uma única força, que essa força tem a direção do eixo x, e que sua componente x é $f_x = -bv_x$, sendo b uma constante positiva e v_x a componente x da velocidade da partícula (ou seja, $v_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, em que x é a posição da partícula em função do tempo). Uma força desse tipo é comumente chamada de *arrasto* - neste caso, um *arrasto linear* (pois $-b\,v_x$ é proporcional a v_x). Trata-se de um dos tipos de força de resistência do ar.[72] Nesta atividade, você obterá a função $v_x(t)$ resolvendo a *equação diferencial* que resulta da aplicação da *segunda lei de Newton* a essa partícula, e aprenderá uma técnica muito importante para nós físicos: a *técnica de separação de variáveis* (para uma função real de uma variável real[73]).

a) Seja F_{res_x} a componente x da força resultante sobre a partícula. A segunda lei de Newton nos diz que $F_{\mathrm{res}_x} = ma_x$, em que $a_x = \mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t$. Neste problema, temos $F_{\mathrm{res}_x} = f_x = -bv_x$. Obtenha a seguinte igualdade:

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -\frac{b}{m}v_x. \tag{136}$$

Temos aqui nossa equação diferencial. Estamos em busca de todas as funções $v_x(t)$ que tornam a igualdade (136) uma sentença verdadeira.

b) Em primeiro lugar, perceba que se $v_x = 0$, temos $\mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t = 0$. Assim, se a partícula está em repouso em $t = 0$, ela permanece em repouso, como esperado (pelo fato de a força resultante ser uma força de resistência do ar, e não há resistência do ar com a partícula em repouso em relação ao ar). Mas este não é um caso particular muito interessante, concorda? Então vamos supor que em $t = 0$ temos $v_x \neq 0$. Lembrando que b e m são positivos, convença-se, a partir da igualdade (136), de que se $v_x \neq 0$ em um certo instante t, a partícula está *mais lenta* após um intervalo de tempo $\mathrm{d}t$ (embora a variação de v_x nesse intervalo de tempo seja infinitesimal, é claro). (Dica: analise, separadamente, os casos $v_x > 0$ e $v_x < 0$, e observe que o sinal de $\mathrm{d}v_x$ é sempre oposto ao sinal de v_x.)

c) Observe que se $v_x \neq 0$, a igualdade (136) pode ser reescrita como

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{v_x} = -\frac{b}{m}\,\mathrm{d}t. \tag{137}$$

Há uma separação intencional das variáveis v_x e t, quando passamos da igualdade (136) para a igualdade (137), e a vantagem disso é que podemos integrar separadamente cada membro desta igualdade. Primeiro, devemos estar atentos aos limites de integração. Convença-se de que está correto escrevermos (usamos "til" nas variáveis de integração $\tilde{v}_x$ e $\tilde{t}$ para diferenciá-las dos limites superiores de integração v_x e t, respectivamente):

$$\int_{v_{x_0}}^{v_x} \frac{\mathrm{d}\tilde{v}_x}{\tilde{v}_x} = \int_0^t -\frac{b}{m}\mathrm{d}\tilde{t}, \tag{138}$$

em que $v_{x_0} = v_x(0)$ e $v_x = v_x(t)$. Mas há uma sutiliza, aqui: a integral no membro esquerdo de (138) não permite v_{x_0} e v_x com sinais opostos, porque não podemos ter, no integrando, $\tilde{v}_x = 0$. Então *devemos supor que v_{x_0} e v_x têm o mesmo sinal, e verificar se isso de fato ocorre, na expressão final para $v_x(t)$*. Muito bem, calculando as duas integrais em (138), obtenha $v_x(t)$. E verifique se v_{x_0} e $v_x(t)$ têm sempre o mesmo sinal. (Dica: faça uso do resultado em (134), já que

[72] Em um *arrasto quadrático*, considerando-se um movimento ao longo do eixo x, temos $f_x = -c\,v_x^2$, em que c é uma constante positiva. E há expressões mais complicadas para forças de resistência do ar (ou de outro fluido, incluindo líquidos): por exemplo, uma combinação do tipo $f_x = -b\,v_x - c\,v_x^2$. Pesquise a respeito.

[73] Há também a técnica de separação de variáveis para a resolução de *equações diferenciais parciais* (quando temos funções de duas ou mais variáveis). Veremos isso na Parte V desta série.

podemos ter $\tilde{v}_x < 0$. Ou, mais diretamente, faça uso do resultado em (135). Se optar por fazer uso do resultado em (134), observe que, rigorosamente, não faz sentido tomarmos o logaritmo de uma velocidade; mas a discussão realizada na Atividade 2-36 nos mostrou como lidar com isso.)
d) Usando um aplicativo como o Geogebra, trace o gráfico de $v_x(t)$ para $t \geq 0$, com $b/m = 1\,\mathrm{s}^{-1}$ e $v_{x_0} = 2\,\mathrm{m/s}$. Em seguida, mude v_{x_0} para $-2\,\mathrm{m/s}$, e trace o gráfico de $v_x(t)$. Observe esses dois gráficos com atenção, pois eles são de tipos muito comuns na física.
e) Obtenha $v_x(t)$, mas agora considerando $v_{x_0} = v_x(t_0)$; ou seja, substitua o "instante inicial" $t = 0$ por $t = t_0$.

Atividade 2-40: A obtenção das antiderivadas de $f(x) = \ln x$ não é uma tarefa complicada, mas também não se trata de algo óbvio. A forma usual de obtermos tais antiderivadas é com a aplicação da técnica de *integração por partes*, que veremos na Parte II-B desta série. Mas, aqui, você obterá as antiderivadas de $f(x) = \ln x$ por inspeção, contando com um pouco de "sorte". Imagine que você precisou calcular a derivada da seguinte função: $g(x) = x \ln x$. Faça isso. E use o resultado (aqui está o elemento "sorte") para obter, por inspeção, as antiderivadas de $f(x) = \ln x$.[74]

Atividade 2-41: a) Tendo realizado a Atividade 2-40, calcule

$$\int_{1/2}^{1} \ln x \, \mathrm{d}x, \qquad \int_{1}^{2} \ln x \, \mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad \int_{1/2}^{2} \ln x \, \mathrm{d}x.$$

Forneça, adicionalmente, resultados numéricos, com aproximação de 3 casas decimais.
b) Usando um aplicativo como o Geogebra, trace o gráfico de $f(x) = \ln x$ e as retas $x = 1/2$ e $x = 2$, e então interprete os resultados do item **a** geometricamente.

Antes de passarmos à Atividade 2-42, vamos por em destaque as antiderivadas de $\ln x$:

$$\boxed{f(x) = \ln x \quad (x > 0) \quad \Longrightarrow \quad F(x) = x \ln x - x + C,} \tag{139}$$

em que C é uma constante arbitrária.

Atividade 2-42: a) Seja N um número natural maior que 1. Você sabe: o *fatorial de* N é denotado por $N!$ (lê-se "fatorial de N" ou "N fatorial") e definido como

$$N! \equiv N(N-1)(N-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1. \tag{140}$$

Na *mecânica estatística*, com frequência surge uma expressão como $\ln(N!)$, com $N \gg 1$ (por exemplo, $N = 10^{23}$). Usando a propriedade básica de que *o logaritmo do produto é igual à soma dos logaritmos*, obtemos:

$$\ln(N!) = \ln(N(N-1)(N-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1) \tag{141}$$

$$= \ln N + \ln(N-1) + \ln(N-2) + \cdots + \ln 3 + \ln 2 + \overbrace{\ln 1}^{0}. \tag{142}$$

Mas nem a expressão no membro direito de (141), nem aquela em (142), parece amigável para a realização de cálculos analíticos, considerando-se um número natural $N > 1$ qualquer, concorda? Felizmente, há uma excelente aproximação para $\ln(N!)$, quando temos $N \gg 1$: a chamada *aproximação de Stirling* (que o pessoal da mecânica estatística sabe de cor),

$$\boxed{\ln(N!) \approx N \ln N - N, \ \text{ para } N \gg 1. \quad \text{(Aproximação de Stirling)}} \tag{143}$$

[74] Após realizar esta atividade - mas não antes - revise a Atividade 2-33, item **a**, e a nota de rodapé 63.

Sua principal tarefa, nesta atividade, é obter esta aproximação. Não há uma única forma de obtê-la, mas a que você verá aqui é bastante simples e convincente. Muito bem, a Fig. 17 mostra o gráfico de $\ln x$, e uma série de retângulos de áreas $\ln 2$, $\ln 3$, $\ldots$, $\ln(N-2)$, $\ln(N-1)$, $\ln N$ (afinal, todos esses retângulos têm base igual a 1, e, portanto, suas áreas são numericamente iguais às suas alturas). A partir desta figura, convença-se, *geometricamente*, de que (veja (142))

$$\ln(N!) = \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln(N-2) + \ln(N-1) + \ln N \approx \int_1^N \ln x \, \mathrm{d}x, \quad \text{para } N \gg 1.$$

Calculando esta integral, obtenha a aproximação de Stirling. (Dica: ao final, você terá que realizar uma aproximação adicional; convença-se, geometricamente, de que ela é razoável, para $N \gg 1$.)

b) Observe que a soma das áreas de todos os retângulos é maior que a área sob a curva (no intervalo de $x = 1$ a $x = N$), e, portanto, temos sempre

$$\ln(N!) > \underbrace{\int_1^N \ln x \, \mathrm{d}x}_{N\ln N - N + 1} > N \ln N - N.$$

Contudo, convença-se - geometricamente - de que a *diferença relativa*

$$\frac{\ln(N!) - (N \ln N - N)}{\ln(N!)}$$

vai ficando cada vez menor quando vamos aumentando o valor de N, e que isto significa que a aproximação de Stirling vai ficando cada vez melhor, quando vamos aumentando o valor de N.

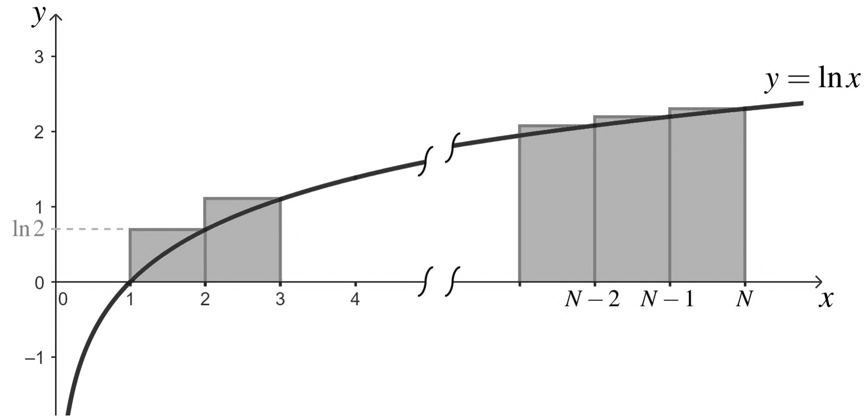


Figura 17: Atividade 2-42.

c) Para ter uma ideia de quão boa é a aproximação de Stirling, observe a tabela abaixo, cujos valores apresentados foram obtidos (sem arredondamentos) com uma calculadora eletrônica. Mostre que o *erro percentual* com o uso da aproximação de Stirling - ou seja, a *diferença relativa percentual* $[\ln(N!) - (N \ln N - N)]/\ln(N!) \times 100\%$ - é menor que 1% para $N = 100$. E esse erro vai diminuindo, quando vamos aumentando o valor de N. Na mecânica estatística, podemos ter, por exemplo, $N = 10^{23}$. Com um valor tão grande para N, a aproximação de Stirling é praticamente uma igualdade.

N	$\ln(N!)$	$N\ln N - N$
3	1,791759...	0,2958368...
5	4,787491...	3,047189...
10	15,10441...	13,02585...
20	42,33561...	39,91464...
100	363,7393...	360,5170...

Tabela 5: Atividade 2-42.

Atividade 2-43: **a)** Fazendo uso das igualdades (69) e (113), obtenha:

$$\boxed{[e^x]' = e^x\,.} \tag{144}$$

Trata-se de um resultado muito especial: a derivada da função e^x é igual a ela mesma! É claro, segue imediatamente que

$$\boxed{f(x) = e^x \quad \Longrightarrow \quad F(x) = e^x + C,} \tag{145}$$

em que C é uma constante arbitrária.
b) Alternativamente, obtenha a igualdade (144) sem o uso da igualdade (69), de forma semelhante ao desenvolvimento em (70) (que explora a praticidade da notação de Leibniz).

Atividade 2-44: **a)** Fazendo uso da *regra da cadeia*, calcule a derivada da função

$$f(x) = Ae^{ax},$$

em que A e a são constantes não nulas.
b) Observe que se x não é *adimensional*, a dimensão de a é necessariamente inversa à dimensão de x, para que o expoente ax seja adimensional. Não faz sentido, por exemplo, uma expressão como $e^{3\,\text{metros}}$ ou $e^{-2\,\text{segundos}}$; o expoente precisa ser adimensional. Se x é um comprimento, a tem dimensão de inverso de comprimento; podemos ter, digamos, $a = 3\,\text{m}^{-1}$. Se quisermos que a constante no expoente tenha a mesma dimensão de x, podemos reescrever Ae^{ax} como $Ae^{x/\alpha}$, com $\alpha = 1/a$. Calcule a derivada de

$$g(x) = Ae^{x/\alpha},$$

em que A e α são constantes não nulas.
c) Calcule as derivadas de

$$\tilde{f}(x) = Ae^{-ax} \qquad \text{e} \qquad \tilde{g}(x) = Ae^{-x/\alpha},$$

em que A é uma constante não nula, e a e α são constantes positivas.[75]
d) Agora obtenha, por inspeção, as antiderivadas das funções $f(x)$, $g(x)$, $\tilde{f}(x)$ e $\tilde{g}(x)$, acima.
e) Calcule as seguintes integrais:

$$\int_0^2 6\,e^{-3x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 \frac{1}{4}\,e^{x/2}\,\mathrm{d}x\,.$$

[75]É claro, podemos fazer, nos itens **a** e **b**, respectivamente, a e α menores que zero, mas é comum, na física, escrevermos "$-a$" e "$-1/\alpha$", com $a > 0$ e $\alpha > 0$, para explicitar o sinal da constante que multiplica a variável no expoente, quando essa constante é negativa.

f) É muito importante que estudantes de física aprendam a rapidamente visualizar o que ocorre com os gráficos das funções $f(x)$, $g(x)$, $\tilde{f}(x)$ e $\tilde{g}(x)$, acima, quando os valores das constantes A, a e α são alterados. Vamos repetir aqui suas expressões, mas desta vez considerando, para $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente $a > 0$ e $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= Ae^{ax} && (A \neq 0 \text{ e } a > 0); \\ g(x) &= Ae^{x/\alpha} && (A \neq 0 \text{ e } \alpha > 0); \\ \tilde{f}(x) &= Ae^{-ax} && (A \neq 0 \text{ e } a > 0); \\ \tilde{g}(x) &= Ae^{-x/\alpha} && (A \neq 0 \text{ e } \alpha > 0). \end{aligned} \tag{146}$$

Usando um aplicativo como o Geogebra, trace o gráfico de cada uma das quatro funções acima, inicialmente com $A = 2$, e fazendo a variar de 0 a 2, e α variar de 0,2 a 2. Faça um gráfico por vez. Brinque com isso, mas preste atenção ao que está ocorrendo. O ideal é que possamos visualizar mentalmente como esses gráficos mudam quando mudamos os valores das constantes a e α. Por exemplo, podemos visualizar que o valor de $\tilde{f}(x)$, para $x > 0$ (lembrando que estamos fazendo $A = 2$), diminui, quando o valor de a aumenta, reescrevendo (mentalmente) $\tilde{f}(x)$ como $\tilde{f}(x) = A/e^{ax}$, e observando que quanto maior o valor de $a > 0$, para um determinado $x > 0$, maior o valor de e^{ax} - e, portanto, menor o valor de $\tilde{f}(x)$.
g) Refaça a atividade do item anterior, mas desta vez com $A = -2$. Entenda que não se trata de uma situação inteiramente nova: os gráficos são os mesmos do item **f**, mas refletidos em relação ao eixo x.
h) Vejamos um exemplo da importância do tipo de análise que você fez ao trabalhar no item **f** desta atividade. Considere um gás ideal monoatômico confinado a um volume V, com uma temperatura absoluta T, e que cada átomo desse gás possui massa m. Quando estudar mecânica estatística, você aprenderá que a probabilidade de que um átomo desse gás, escolhido ao acaso, tenha sua componente x de velocidade entre v_x e $v_x + \mathrm{d}v_x$, sua componente y de velocidade entre v_y e $v_y + \mathrm{d}v_y$, e sua componente z de velocidade entre v_z e $v_z + \mathrm{d}v_z$, é proporcional a

$$e^{-E/kT}\,\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z,$$

em que

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

é a energia (cinética) desse átomo, e k é uma constante chamada de *constante de Boltzmann* - uma das constantes básicas da física, de valor aproximado $1,38 \times 10^{-23}$J/K. Como muda essa probabilidade quando a temperatura absoluta T do gás aumenta? Ela aumenta ou diminui?

Atividade 2-45: Nesta atividade, você obterá as derivadas e as antiderivadas das funções exponenciais de base b não necessariamente igual a e - ou seja, das funções b^x, com $0 < b \neq 1$. Como você verá, há mais de uma forma de fazer isso.
a) Mostre que podemos reescrever b^x (com $0 < b \neq 1$) como $e^{x\ln b}$, e então obtenha:

$$\boxed{[b^x]' = b^x \ln b \quad (0 < b \neq 1).} \tag{147}$$

Este é o caminho mais simples, em nossa opinião.
b) Alternativamente, obtenha o resultado acima fazendo uso das igualdades (69) e (114).
c) A partir de (147) obtenha, por inspeção, o seguinte resultado:

$$\boxed{f(x) = b^x \quad (0 < b \neq 1) \quad \Longrightarrow \quad F(x) = \frac{b^x}{\ln b} + C,} \tag{148}$$

em que C é uma constante arbitrária.
d) Mostre que, como esperado, os resultados em (147) e (148) recaem naqueles em (144) e (145), respectivamente, no caso em que $b = e$.
e) Obtenha a derivada e as antiderivadas da função $f(x) = 2^x$.

Saiba que, na física, raramente precisamos derivar ou integrar funções exponenciais de base $b \neq e$. Assim, em princípio você não precisa memorizar os resultados em (147) e (148); apenas os resultados em (144) e (145) - que são, essencialmente, o mesmo resultado, concorda? Ou seja, basta você lembrar que $[e^x]' = e^x$. Se precisar obter a derivada ou uma antiderivada da função b^x (com $0 < b \neq 1$), basta reescrever:[76]

$$\boxed{b^x = \left(e^{\ln b}\right)^x = e^{x \ln b} \quad (0 < b \neq 1).} \tag{149}$$

Isto vale a pena guardar na memória.

Atividade 2-46: a) Sabemos que expressões como $3^{4\,\text{metros}}$ e $2^{3\,\text{segundos}}$ não fazem sentido. O argumento de uma função exponencial de base b (com $0 < b \neq 1$) é, necessariamente, um número puro. Assim, digamos que um estudante ou uma estudante afirma que a posição x de uma determinada partícula varia com o tempo t de acordo com a seguinte função: $x(t) = 2^t$, para $t \geq 0$, com t em segundos e x em metros. Entendemos que tal estudante tem em mente uma partícula que, por exemplo, no instante $t = 0$ está na posição $x = 2^0\,\text{m} = 1\,\text{m}$ e no instante $t = 3\,\text{s}$ está na posição $x = 2^3\,\text{m} = 8\,\text{m}$, movendo-se continuamente com o passar do tempo. Mas, rigorosamente, o segundo membro da igualdade $x = 2^t$ está escrito de forma incorreta, e o erro é duplo: não existe, por exemplo, $2^{3\,\text{segundos}}$, e a unidade de x não apareceria ao final desta conta, mesmo que ela pudesse ser feita. Corrija o segundo membro desta igualdade, *introduzindo constantes apropriadas* ou *explicitando as unidades*.
b) Em seguida, usando a igualdade (147), obtenha $v_x(t) = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ e $a_x(t) = \mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t$.

Atividade 2-47: Seja $f(x) = x^x$, com $x \geq 0$.
a) Calcule a derivada desta função (mas não olhe a resposta antes de trabalhar no item **b**).
b) Usando um aplicativo como o Geogebra, trace o gráfico de $f(x) = x^x$ e de sua derivada $f'(x)$ (fazendo uso da expressão que você obteve no item **a**), e verifique se o gráfico de $f'(x)$ está de acordo com o esperado. Trata-se de um teste para a expressão que você obteve no item **a**. Lembre-se: nem sempre há "resposta na parte final do livro"; precisamos submeter os resultados de nossos cálculos a testes, para ganharmos confiança neles. Esses testes geralmente não provam que um determinado resultado está correto, mas possibilitam a identificação de erros. À medida que um determinado resultado vai passando em testes, vamos ganhando confiança nele - embora não haja garantias, entende? É a vida. A propósito, realizar esses testes é uma boa prática, um bom treino, mesmo quando há uma resposta prontamente disponível. Continuando: se você acha que sua expressão para $f'(x)$ passou neste teste, veja agora a resposta no Apêndice A para este item; se não, tente refazer seu cálculo.
c) Verifique se $f'(x) = [x^x]' = x \cdot x^{x-1} = x^x$ (resultante da aplicação imprópria da regra da potência) passaria no teste que você faz no item **b**.

Atividade 2-48: a) Na Atividade 2-39 você resolveu a equação diferencial (136) através da técnica de separação de variáveis. Nesta atividade, você aprenderá a resolvê-la de outra forma (igualmente simples): propondo uma *solução tentativa*, e testando-a. Vamos repetir a equação

[76] É claro, $e^{\ln b} = b$ porque e^x e $\ln x$ são funções inversas, uma da outra.

(136) aqui:

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -\frac{b}{m}v_x. \tag{150}$$

Estamos em busca de todas as funções $v_x(t)$ que tornam esta igualdade uma sentença verdadeira. Ora, quais são as funções cujas derivadas são iguais a elas mesmas multiplicadas por uma constante? Convença-se de que faz sentido escrevermos a seguinte solução tentativa:

$$v_x(t) = A\,e^{at},$$

em que A e a são constantes. Teste esta solução tentativa, substituindo-a na equação diferencial acima, e obtenha a função $v_x(t)$. Faça o melhor que puder, antes de ver a resposta no Apêndice A.

b) Agora que você tem a função $v_x(t)$ e sabe integrar funções exponenciais, obtenha a função $x(t)$, que dá a posição da partícula em um determinado instante t, a partir de $t = 0$. Denote a posição da partícula em $t = 0$ por x_0.

c) Para que valor tende $x(t)$, quando $t \to \infty$?

d) Usando um aplicativo como o Geogebra, trace o gráfico de $v_x(t)$, para $t \geq 0$, considerando $v_{x_0} \equiv v_x(0) = 3\,\mathrm{m/s}$ e $b/m = 2\,\mathrm{s}^{-1}$. Em seguida, trace o gráfico correspondente de $x(t)$, considerando que a posição da partícula em $t = 0$ é 0. Observe que a posição da partícula está sempre abaixo de um determinado valor.

e) Há uma "terceira forma" de resolver a equação diferencial (150) (na verdade, está mais para uma forma alternativa do método da separação de variáveis, em que não trabalhamos com integrais definidas, mas com cálculos de antiderivadas). Vamos explorá-la neste item. Podemos reescrever a igualdade (150) como

$$\frac{\mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t}{v_x} = -\frac{b}{m}. \tag{151}$$

Qual é a vantagem disso? Qual foi a sacada, aqui? Veremos. Cada membro da igualdade (151) é uma função de t (no membro direito, uma função constante). Como elas são iguais, suas antiderivadas são iguais ou diferem por uma constante C. Convença-se de que isso nos leva a:[77]

$$\ln|v_x| = -\frac{b}{m}t + C, \tag{152}$$

em que C é uma constante arbitrária. Basta derivar, em relação a t, cada membro de (152), que obtemos (151) (lembre-se da regra da cadeia). A sacada foi que ao reescrevermos (150) como (151), pudemos obter as antiderivadas de cada membro. Perceba que houve uma separação intencional de variáveis. Você pode dizer: mas temos "dt" no membro esquerdo de (151)! Sim, temos, e isso é mesmo desejado, aqui, devido à regra da cadeia - pois derivando o membro esquerdo de (152) em relação a t, a regra da cadeia nos fornece o fator $\mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t$. Muito bem, obtenha, a partir de (152), a mesma expressão para $v_x(t)$ apresentada na resposta para o item **a**. (Observação e dica: A condição $v_x(0) = v_{x_0}$ que usamos para determinar a constante C em (152) é chamada de *condição inicial*. Trata-se de um termo adequado, não acha? O problema de resolver a equação diferencial (150), com a condição inicial $v_x(0) = v_{x_0}$ (supondo v_{x_0} conhecido ou especificado), é chamado de *problema de valor inicial*.)

[77] Você sabe: rigorosamente, não podemos tomar o logaritmo de uma quantidade dimensional. Discutimos isso na Atividade 2-36. Mas, como dissemos lá, esse é um abuso que nós físicos nos permitimos, para simplificar a escrita, já que a expressão final está correta. Mas se isso lhe incomoda, basta proceder como mostramos na Atividade 2-36: reescreva a igualdade (151) como $(\mathrm{d}v_{x_\mathrm{N}}/\mathrm{d}t)/v_{x_\mathrm{N}} = -b/m$, em que $v_{x_\mathrm{N}} \equiv v_x/v_{x_\mathrm{u}}$, sendo v_{x_u} uma velocidade unitária com a mesma unidade escolhida para v_x, e então realize os cálculos. Ao final, tendo a expressão para $v_{x_\mathrm{N}}(t)$, expresse $v_x(t)$ como $v_{x_\mathrm{N}}(t)\,v_{x_\mathrm{u}}$, e a unidade voltará a aparecer. Não chamaremos mais sua atenção para isso neste texto, tá certo? Se você tem esse tipo de cuidado extremo, respeitamos, mas a partir agora esses detalhes ficam por sua conta.

Atividade 2-49: Certos núcleos atômicos são instáveis, e com emissões de partículas alfa, beta ou gama adquirem maior estabilidade (você deve conhecer o básico de *radioatividade*, ao nível do ensino médio; se não, pesquise a respeito). Essas emissões têm um caráter estocástico (aleatório): não sabemos prever quando um determinado núcleo instável irá emitir uma partícula; pode ser no próximo segundo, ou não ocorrer em mil anos. Mas podemos supor que a probabilidade de que um determinado núcleo instável, "observado" em um certo instante t, emita uma partícula no intervalo de tempo $\mathrm{d}t$ seguinte pode ser expressa como $\lambda\mathrm{d}t$, em que λ é uma constante positiva chamada de *constante radioativa* ou *constante de decaimento radioativo* ou, simplesmente, *constante de decaimento*. A ideia é que cada radioisótopo - ou seja, cada tipo de núcleo instável, como, por exemplo, o carbono-14 - tem sua constante de decaimento característica. Quanto maior o valor de λ, maior a probabilidade de decaimento, no intervalo de tempo $\mathrm{d}t$ (embora seja uma probabilidade infinitesimal, devido ao fator $\mathrm{d}t$). Considere que uma determinada porção macroscópica de matéria possui, no instante t, $\mathscr{N}$ núcleos instáveis de um certo tipo. É claro, $\mathscr{N}$ será uma função decrescente de t. Mas que função? É possível prevê-la? O que temos é a hipótese acima (de que a probabilidade de que um determinado núcleo instável, observado em um certo instante t, emita uma partícula no intervalo de tempo $\mathrm{d}t$ seguinte pode ser expressa como $\lambda\mathrm{d}t$). Veremos que essa hipótese é suficiente para obtermos a função $\mathscr{N}(t)$ - ou seja, a função $\mathscr{N}(t)$ que obteremos a partir dessa hipótese é a função que corresponde às observações experimentais. Mas antes de passarmos à obtenção de $\mathscr{N}(t)$, vamos comentar tal hipótese, e aprofundar nosso entendimento do significado da probabilidade $\lambda\mathrm{d}t$.

O que talvez seja mais forte na hipótese básica que envolve a expressão $\lambda\mathrm{d}t$ é a ideia de que "núcleos instáveis não envelhecem". De um modo geral, quanto mais velha uma pessoa fica, maiores as chances de problemas de saúde ocorrerem e a levarem à morte, não é? Mas a expressão $\lambda\mathrm{d}t$ é a mesma, para qualquer instante t (já que estamos suponto λ constante), e isso significa que a probabilidade de um núcleo instável decair em um intervalo de tempo $\mathrm{d}t$ a partir de um certo instante é a mesma, quer tal núcleo tenha sido criado há 1 segundo, quer exista há 1 milhão de anos (ou mais)! Trata-se de uma afirmativa forte, concorda? Podemos testá-la explorando as previsões teóricas que decorrem dessa hipótese, e comparando-as com observações experimentais. Saiba, desde já, que a concordância é excelente!

Examinemos agora o que significa, em termos experimentais ou observacionais, a probabilidade $\lambda\mathrm{d}t$ de que um determinado núcleo instável, observado em um certo instante t, emita uma partícula no intervalo de tempo $\mathrm{d}t$ seguinte. Para isso, faremos uma breve digressão.

Você sabe que a probabilidade de obtermos a face 5 voltada para cima, ao lançarmos um dado comum, é $1/6$. Mas o que isso significa, em termos práticos? Bem, podemos dizer que há 1 chance em 6 de obtermos a face 5. Isso está correto, mas há - para nós físicos - uma forma mais interessante de ler esse resultado: se realizarmos o experimento (que consiste em lançar o dado e observar a face voltada para cima ao final) um número N suficientemente grande de vezes, a fração de vezes que obteremos a face 5 será aproximadamente $1/6$. Mais tecnicamente, podemos escrever (para nos livrarmos da imprecisão inerente à expressão "um número suficientemente grande de vezes"):

$$\lim_{N\to\infty} \frac{n_5(N)}{N} = \frac{1}{6}, \tag{153}$$

sendo $n_5(N)$ o número de vezes que obtemos a face 5, com N lançamentos do dado. Esta igualdade nos diz que a *fração de vezes que obtemos a face* 5 *tende a* $1/6$*, quando o número N de realizações do experimento tende a infinito*. Não se trata, exatamente, de um limite matemático, pois $n_5(N)$ não é, propriamente, uma função de N, devido ao caráter estocástico do experimento. Por exemplo, realizando o experimento 6000 vezes, podemos ter $n_5(N) = n_5(6000) = 950$, e refazendo esses 6000 lançamentos muito provavelmente obteremos $n_5(6000) \neq 950$ (embora

muito provavelmente tenhamos $n_5(6000)$ próximo de 1000, que é $1/6$ de 6000). Nesse sentido, a própria notação "$n_5(N)$", usada para funções, pode ser considerada aqui inadequada; talvez seja melhor escrevermos, em (153), "n_5" (sem o "(N)"). O que a igualdade (153) expressa é a expectativa de que quando o número N de realizações do experimento tende a infinito, a fração de vezes que obtemos a face 5 tende a $1/6$ (mesmo que de uma forma nada "suave", diferentemente do que vemos em gráficos de funções "bem comportadas"). Na prática, é claro, não é possível realizar o experimento um número infinito de vezes; mas obtemos ótimos resultados com um número N suficientemente grande de realizações. E aí, infelizmente, para cada tipo de experimento não determinístico esse "N suficientemente grande" poderá mudar: em um caso poderemos obter bons resultados com, digamos, $N = 10^6$, e em outro não obter bons resultados com $N = 10^9$. Para o experimento em questão (do lançamento do dado), é quase certo que obteremos um ótimo resultado - ou seja, a fração de vezes em que a face 5 é obtida será aproximadamente $1/6$ $(= 0{,}1666...)$ - com, por exemplo, 1 milhão de realizações (e podemos deixar um computador fazer esse trabalho por nós - mas isso é assunto para a Parte III desta série).
Agora, veja que interessante: em vez de realizarmos o experimento N vezes *sequencialmente* (ou seja, uma realização após a outra), podemos contar com N pessoas, cada uma com seu dado, e as N realizações ocorrerem *em paralelo* (ou seja, simultaneamente). Nos dois casos, estamos supondo que uma realização não afeta o resultado de outra.
As ideias acima se aplicam, em princípio, a qualquer *experimento não determinístico*, como exploraremos em mais detalhes na Parte III e na Parte VI desta série. Assim, voltemos ao problema de obtermos $\mathcal{N}(t)$. Temos, em um certo instante t, $\mathcal{N}(t)$ núcleos instáveis em uma porção macroscópica de matéria. Cada núcleo tem probabilidade $\lambda \mathrm{d}t$ de decair no intervalo de tempo $\mathrm{d}t$ seguinte, segundo nossa hipótese básica. Eis a sacada: *"observar" quantos núcleos, do total de $\mathcal{N}$, decaem no intervalo de tempo* $\mathrm{d}t$ *é como realizar o experimento com cada núcleo $\mathcal{N}$ vezes, concorda? São $\mathcal{N}$ realizações em paralelo. E como $\mathcal{N}(t)$ é, usualmente, um número muito grande, a fração $|\mathrm{d}\mathcal{N}|/\mathcal{N}$ de núcleos que decaem no intervalo de tempo* $\mathrm{d}t$ *é aproximadamente igual à probabilidade de decaimento de cada núcleo no intervalo de tempo* $\mathrm{d}t$ *- ou seja,* $\lambda \mathrm{d}t$. Podemos então escrever:

$$\frac{|\mathrm{d}\mathcal{N}|}{\mathcal{N}} = \lambda \mathrm{d}t. \tag{154}$$

Agora é com você.
a) Convença-se de que podemos escrever, a partir da igualdade (154):

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{N}}{\mathcal{N}} = -\lambda \mathrm{d}t. \tag{155}$$

b) Perceba que temos, em (155), uma equação diferencial para $\mathcal{N}(t)$. Ela está em uma forma que "pede" para ser resolvida pelo método da separação de variáveis, concorda? Faça isso (trabalhando com integrais definidas). Em seguida, alternativamente, reescreva a igualdade (155) como

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{N}/\mathrm{d}t}{\mathcal{N}} = -\lambda, \tag{156}$$

e resolva esta equação diferencial de forma semelhante à apresentada no item **e** da Atividade 2-48 - ou seja, observando que cada membro da igualdade (156) é uma função de t, e, como elas são iguais, suas antiderivadas são iguais ou diferem por uma constante C.
c) Agora, reescreva a equação diferencial em (155) como

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{N}}{\mathrm{d}t} = -\lambda \mathcal{N}, \tag{157}$$

e resolva-a propondo e testando uma solução tentativa.[78]
d) Qual é a unidade de tempo, no SI (Sistema Internacional de Unidades), de λ? Você pode obter a resposta de duas formas (entre outras): observando que toda probabilidade é um número puro (ou seja, sem unidade), e observando a expressão que obteve para $\mathscr{N}(t)$ nos itens **b** e **c**.
e) Considere uma porção macroscópica de matéria com um determinado número $\mathscr{N}$ de núcleos instáveis de um mesmo tipo (que em geral constituem uma pequena fração do total de núcleos; ou seja, em geral a maioria dos núcleos de uma amostra radioativa são estáveis). A *atividade* dessa amostra radioativa é denotada por A e definida como a *taxa de decaimento radioativo* da mesma, no instante considerado. Convença-se de que

$$A = \left| \frac{\mathrm{d}\mathscr{N}}{\mathrm{d}t} \right|. \tag{158}$$

Em seguida, mostre que

$$A(t) = A_0 \, e^{-\lambda t}, \tag{159}$$

em que A_0 é a atividade da amostra no instante $t = 0$. Mostre também que

$$A(t) = \lambda \mathscr{N}(t), \tag{160}$$

ou seja, que A é proporcional a $\mathscr{N}$, sendo λ a constante de proporcionalidade.
f) De acordo com a relação de proporcionalidade em (160), quando o número $\mathscr{N}$ de núcleos instáveis na amostra radioativa cai à metade, a atividade A da amostra também cai à metade, e vice-versa. Definimos a *meia-vida*, $T_{1/2}$, *de um radioisótopo* como o intervalo de tempo em que a atividade de uma amostra macroscópica contendo um grande número de núcleos instáveis desse tipo cai à metade (que é também o intervalo de tempo em que o número $\mathscr{N}$ de núcleos instáveis na amostra cai à metade). Mostre que

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}. \tag{161}$$

Uma observação final:
Medidas experimentais da atividade de uma amostra radioativa, em função do tempo, nos permitem obter a constante de decaimento λ para o radioisótopo em questão. E uma vez conhecida a constante λ, uma medida experimental de A, para um determinado instante, nos permite obter o número $\mathscr{N}$ de núcleos instáveis naquele instante, com o uso da igualdade (160). Muito interessante, não acha? Não temos que "contar", diretamente, os núcleos instáveis.

Atividade 2-50: Na Atividade 2-48 e na Atividade 2-49 nos deparamos com equações diferenciais do seguinte tipo (veja as igualdades (150) e (157), respectivamente):

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = c\,y, \tag{162}$$

[78] É interessante observar como nós, físicos, fazemos uso do cálculo diferencial e integral em um desenvolvimento como este. Se pensarmos $\mathrm{d}\mathscr{N}$ como uma quantidade realmente infinitesimal - ou seja, se quisermos tomar, para a razão $\Delta\mathscr{N}/\Delta t$, o limite em que Δt tende a 0 -, teremos um problema, pois $\mathscr{N}$ é um número inteiro, e portanto varia, no mínimo, de 1 em 1. Então o menor valor não nulo que $|\Delta\mathscr{N}|$ poderia assumir seria 1. Mas como usualmente temos $\mathscr{N}$ muito grande (por exemplo, $\mathscr{N}$ da ordem de 10^{17}), podemos tratar a variável $\mathscr{N}$ como contínua, em vez de discreta, e considerar $\Delta\mathscr{N}$ infinitesimal - então denotando-o por $\mathrm{d}\mathscr{N}$. Trata-se de uma modelagem. Tratar quantidades que não são infinitesimais como infinitesimais não é novidade para nós: vimos que fazemos o mesmo quando usamos a expressão $\mathrm{d}V$ para um volume infinitesimal de um gás ideal (e em um volume infinitesimal não caberia uma única molécula do gás, concorda?). De todo modo, lembre-se de que o próprio conceito de "quantidade infinitesimal" carece de rigor matemático; mas nós físicos, em geral, gostamos muito da ideia, e fazemos uso dela quase sempre. Só precisamos fazer uso com cuidado.

em que y é uma função de x e c é uma determinada constante não nula. Resolver uma equação diferencial desse tipo significa encontrar todas as funções $y(x)$ cujas derivadas são iguais a elas mesmas multiplicadas pela constante c. Aprendemos a resolver esse tipo de equação tanto pelo *método da separação de variáveis* como *propondo e testando uma solução tentativa*. Considerando a condição inicial $y(0) = y_0$, a solução (como você pode verificar) é:

$$y(x) = y_0\, e^{cx}. \tag{163}$$

Mudando a condição inicial para $y(x_0) = y_0$, a solução (como você pode verificar) passa a ser:[79]

$$y(x) = y_0\, e^{c(x-x_0)}. \tag{164}$$

Agora, vamos analisar uma equação diferencial ligeiramente diferente:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = c\,y + d, \tag{165}$$

em que c e d são determinadas constantes, com a restrição, apenas, de que c é não nula. Sua tarefa é encontrar todas as funções $y(x)$ que satisfazem a igualdade (165), e também a *condição inicial* (em sua forma mais geral) $y(x_0) = y_0$.
a) Inicialmente, tente resolver o *problema de valor inicial* acima propondo e testando uma solução tentativa. (Talvez você não tenha em mente, de imediato, uma solução tentativa, mas se dê um tempinho para pensar. Não veja a resposta no Apêndice A, nem passe ao item **b**, antes disso. Apenas se não conseguir propor uma solução tentativa que resolva a equação (165), veja nossa sugestão de solução tentativa na nota de rodapé 80;[80] daí, faça uso dela.)
b) Agora, resolva o problema de valor inicial acima pelo método da separação de variáveis. Faça isso de duas formas: *com* e *sem* o uso de integrais definidas. Ao final, avalie qual dessas três formas foi a mais simples para você, e, se possível, converse com colegas a respeito. (Dica: fazendo uso de integrais definidas, consulte o resultado em (127); não fazendo uso de integrais definidas, revise o item **e** da Atividade 2-48.)

Atividade 2-51: Esta atividade é uma extensão da Atividade 2-39 e da Atividade 2-48. A novidade é que entrará no jogo a força da gravidade: consideraremos um *lançamento vertical* de uma partícula sujeita à ação de uma força de resistência do ar proporcional à sua velocidade. O eixo vertical das posições será o eixo y.[81]
a) Convença-se de que escolhendo o eixo *y apontando para cima*, a componente y da força resultante sobre o corpo, de massa m, pode ser expressa como[82]

$$F_{\mathrm{res}_y} = -bv_y - mg, \tag{166}$$

[79] Observe que a função em (164) é solução da equação diferencial (162) mesmo para $c = 0$. Mas evitamos o caso $c = 0$ porque ele deixaria a equação (162) bem diferente, e levaria diretamente à solução trivial $y = constante$.

[80] $y(x) = A\,e^{ax} + B$.

[81] Poderia ser um eixo x vertical, mas é interessante, quando estudamos movimentos de projéteis, usarmos o eixo x em uma direção horizontal e o eixo y na direção vertical, porque parte dos cálculos que fazemos para movimentos horizontais e para movimentos verticais pode ser aproveitada para o caso mais geral de movimentos oblíquos. Mas, é claro, você é livre para nomear esses eixos como preferir.

[82] Trabalhando com vetores, a igualdade (166) é obtida de forma trivial. Você só precisa conhecer a ideia de *componentes cartesianas de um vetor* - ao nível do ensino médio. A igualdade (166) segue da relação vetorial $\mathbf{F}_{\mathrm{res}} = -b\mathbf{v} + m\mathbf{g}$, observando que com o eixo *y apontando para cima* temos $\mathbf{g} = -g\,\mathbf{j}$, sendo $\mathbf{j}$ o vetor *unitário* (ou seja, de módulo igual a 1) com a direção e o sentido do eixo y. Com o eixo *y apontando para baixo* temos $\mathbf{g} = g\,\mathbf{j}$, concorda?

em que b é uma constante positiva, v_y é a componente y da velocidade da partícula (ou seja, $v_y = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$, em que y é a posição da partícula em função do tempo), e g é o módulo da aceleração da gravidade local. Daí, como $a_y \equiv \mathrm{d}v_y/\mathrm{d}t = F_{\mathrm{res}_y}/m$ (pela segunda lei de Newton), obtenha a seguinte equação diferencial para $v_y(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -\frac{b}{m}v_y - g. \tag{167}$$

b) Resolva o problema de valor inicial constituído pela equação diferencial (167) e pela condição inicial $v_y(0) = v_{y_0}$. Faça uso do método que preferir. (Dica: revise a Atividade 2-50.)
c) Faça $v_{y_0} = 0$ na expressão obtida no item **b**, e simplifique a expressão resultante para $v_y(t)$. Trata-se de um caso particular importante.
d) Verifique, nas expressões que obteve para $v_y(t)$ nos itens **b** e **c**, se de fato temos $v_y(0) = v_{y_0}$ (lembrando que no item **c** temos $v_{y_0} = 0$). Trata-se de um teste mínimo, concorda? Em seguida, obtenha, a partir da expressão para $v_y(t)$ encontrada no item **b**, a "velocidade terminal", v_{ter}, definida como o valor para o qual tende *o módulo* de v_y quando $t \to \infty$. É interessante observar que a velocidade terminal independe de v_{y_0}. Por fim, mostre que a velocidade terminal pode ser prevista igualando-se o módulo do peso da partícula ao módulo da força de resistência do ar sobre a mesma. Você entende por quê?
e) Analisando matematicamente a função $v_y(t)$, poderíamos concluir que a velocidade terminal nunca é alcançada; trata-se apenas de um limite. Afinal, a exponencial $e^{-bt/m}$, na expressão para $v_y(t)$, nunca é igual a zero, por maior que seja t. Mas, na prática, se a velocidade do corpo (prevista teoricamente) difere da velocidade terminal por uma quantidade inferior à precisão com que velocidades são medidas, no experimento, podemos dizer que a velocidade terminal foi alcançada, concorda? Considerando $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$, $v_{y_0} = 0$, e que $v_{\mathrm{ter}} = 10{,}0\,\mathrm{m/s}$,[83] calcule em que instante o módulo de v_y é 99% de v_{ter}. Agora, calcule em que instante o módulo de v_y difere de v_{ter} em $1\,\mathrm{mm/s}$ (digamos que essa é a precisão com que velocidades são medidas, no experimento).
f) Neste item, usando um aplicativo como o Geogebra você irá traçar, em uma mesma figura, gráficos de $v_y(t)$ a partir da expressão obtida no item **b**, considerando $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ e $b/m = 0{,}981\,\mathrm{s^{-1}}$. Primeiro, mostre que esse valor para b/m é o que nos dá, com $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$, $v_{\mathrm{ter}} = 10{,}0\,\mathrm{m/s}$. Em seguida, trace os gráficos de $v_y(t)$, para $t \geq 0$, com os seguintes valores para v_{y_0}: (i) $v_{y_0} = 20\,\mathrm{m/s}$, (ii) $v_{y_0} = 10\,\mathrm{m/s}$, (iii) $v_{y_0} = 5\,\mathrm{m/s}$, (iv) $v_{y_0} = 0$, (v) $v_{y_0} = -5\,\mathrm{m/s}$, (vi) $v_{y_0} = -10\,\mathrm{m/s}$, (vii) $v_{y_0} = -20\,\mathrm{m/s}$. Analise bem esses gráficos. E identifique o instante, calculado no item **e**, em que o módulo de v_y, com $v_{y_0} = 0$, é 99% de v_{ter}.
g) A partir da expressão obtida no item **b** para $v_y(t)$, obtenha a função $y(t)$, que dá a posição da partícula em um determinado instante t, a partir de $t = 0$. Denote a posição da partícula em $t = 0$ por y_0. Em seguida, com um aplicativo como o Geogebra, trace, em uma mesma figura, os gráficos de $y(t)$, para $t \geq 0$, com os parâmetros apresentados no item **f** (usando, separadamente, os seguintes valores para v_{y_0}: (i) $v_{y_0} = 20\,\mathrm{m/s}$, (ii) $v_{y_0} = 10\,\mathrm{m/s}$, (iii) $v_{y_0} = 5\,\mathrm{m/s}$, (iv) $v_{y_0} = 0$, (v) $v_{y_0} = -5\,\mathrm{m/s}$, (vi) $v_{y_0} = -10\,\mathrm{m/s}$, (vii) $v_{y_0} = -20\,\mathrm{m/s}$). Faça $y_0 = 0$. Analise bem esses gráficos; eles são até mais interessantes que os gráficos de velocidade.
h) Mudando o "instante inicial" de $t = 0$ para $t = t_0$ - ou seja, considerando agora que $v_y(t_0) = v_{y_0}$ e $y(t_0) = y_0$ -, como ficam as expressões para $v_y(t)$ e $y(t)$? Não refaça as contas! (Dica: o que importa é a diferença $t - t_0$.)

[83] É importante estarmos cientes de que não necessariamente o modelo matemático com o qual estamos trabalhando aqui - e, em particular, esse valor para a velocidade terminal - se aplica a uma situação física real, pois nela o arrasto pode não ser bem modelado como uma força proporcional à velocidade do corpo em relação ao fluido. Pesquise a respeito.

i) Convença-se de que escolhendo o eixo *y apontando para baixo*, a equação diferencial (167) muda para:

$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -\frac{b}{m}v_y + g. \tag{168}$$

j) Considerando a alteração apresentada no item **i**, como ficam as respostas para o item **h**? Forneça as novas respostas sem refazer as contas!

Analisamos o movimento de corpos sujeitos a forças de resistência do ar na Atividade 2-39, na Atividade 2-48 e na Atividade 2-51. Em todas elas nos limitamos a arrastos lineares. Exploraremos, na Atividade 2-65 e na Atividade 2-66, arrastos quadráticos. Optamos por deixar estas duas atividades próximas, mas você já tem os pré-requisitos para realizar a Atividade 2-65, se quiser. Já a Atividade 2-66 exige o conhecimento prévio de funções hiperbólicas e suas inversas, que é o assunto da próxima subseção. Na Atividade 2-80, voltaremos a analisar o movimento de corpos sujeitos a arrastos lineares, considerando, pela primeira vez, um *lançamento oblíquo*: nela, obteremos a equação da trajetória da partícula e uma aproximação para seu alcance horizontal. O surpreendente cálculo *exato* do alcance horizontal de uma partícula lançada obliquamente e sujeita a um arrasto linear será realizado ao final da Parte II-C desta série, com o uso de uma função não elementar denominada *função W de Lambert*.

Atividade 2-52: De acordo com a chamada *lei do resfriamento de Newton*, a taxa de resfriamento de um corpo é proporcional à diferença de temperatura entre esse corpo e sua vizinhança (se essa diferença é pequena). Matematicamente:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T - T_{\text{viz}}), \tag{169}$$

em que T é a temperatura absoluta do corpo (uma função do tempo t), T_{viz} é a temperatura absoluta da vizinhança (que não muda durante o resfriamento do corpo), e k é uma constante positiva denominada *constante de resfriamento* (cujo valor depende de características do corpo e da vizinhança, e é uma medida da "eficiência" com que o calor flui do corpo para a vizinhança).[84]
a) Resolva o problema de valor inicial constituído pela equação diferencial (169) e pela condição inicial $T(0) = T_0$, considerando $T_0 > T_{\text{viz}}$. Faça uso do método que preferir. (Dica: revise a Atividade 2-50.)[85]
b) Verifique, na expressão que obteve para $T(t)$ no item **a**, se de fato temos $T(0) = T_0$. Em seguida, analise como a temperatura do corpo muda, com o passar do tempo: esboce o gráfico de

[84]Um detalhe técnico: a *taxa de resfriamento do corpo* (que é uma taxa de variação em relação ao tempo) é definida como a quantidade $-\mathrm{d}T/\mathrm{d}t$ (em vez de $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t$), para que essa taxa seja positiva. ($\mathrm{d}T/\mathrm{d}t$ seria uma expressão mais adequada para uma "taxa de aquecimento", concorda?) Por exemplo, dizer que em um certo instante um corpo está resfriando a uma taxa de 2 kelvins por minuto significa que, nesse instante, a temperatura desse corpo está variando a uma taxa de -2 kelvins por minuto - e isso quer dizer que se essa taxa se mantivesse constante, a temperatura do corpo estaria, um minuto após o instante em que foi medida, 2 kelvins mais baixa; ou seja, teria sofrido uma variação de -2 kelvins. Podemos reescrever a igualdade (169) como $-\mathrm{d}T/\mathrm{d}t = k(T - T_{\text{viz}})$, para termos no membro esquerdo a taxa de resfriamento do corpo, mas a forma em (169) é mais comum.

[85]Observe que a equação diferencial (169) é matematicamente equivalente à equação diferencial (167) da Atividade 2-51 - embora os fenômenos físicos correspondentes sejam bem diferentes. Uma vez identificado que essas duas equações diferenciais correspondem à equação diferencial (165), da Atividade 2-50, podemos, nos dois casos, fazer uso da solução que obtivemos naquela atividade. Temos aqui um bom exemplo de como nós, físicos, nos beneficiamos de estudos gerais realizados pelos matemáticos, sem referência a um sistema físico particular. É claro, sempre que pudermos combinar física e matemática, melhor, mas podemos estar diante de um problema físico que nos leva a uma equação diferencial muito complicada, e tentar resolver essa equação "do zero" não seria muito esperto de nossa parte; faz mais sentido pesquisar se o tipo de equação diferencial que temos diante de nós já foi estudado pelos matemáticos (ou mesmo por outros físicos).

$T(t)$ *à mão*, para $t \geq 0$, indicando na figura as temperaturas T_0 e T_{viz}.
c) A partir da expressão para $T(t)$ obtida no item **a**, obtenha:

$$\frac{T - T_{\text{viz}}}{T_0 - T_{\text{viz}}} = e^{-kt} = e^{-t/\tau}, \tag{170}$$

com

$$\tau \equiv \frac{1}{k}. \tag{171}$$

Em seguida, mostre que τ é uma constante, com unidade de tempo, com o seguinte significado físico: *é o tempo necessário para a diferença de temperatura entre o corpo e a vizinhança cair para aproximadamente* 37% *de seu valor inicial*. Essa constante é usualmente denominada *tempo de relaxamento*, porque dá uma ideia de quanto tempo leva para o sistema entrar em equilíbrio térmico com a vizinhança. É claro, não estamos dizendo que após o intervalo de tempo $\Delta t = \tau$, a partir de $t = 0$, o sistema entra em equilíbrio térmico com a vizinhança; acabamos de dizer que após esse intervalo de tempo a diferença de temperatura entre o corpo e a vizinhança cai para aproximadamente 37% de seu valor inicial. Mas quanto maior o valor de τ, mais tempo leva para a diferença de temperatura entre o corpo e a vizinhança cair para, digamos, aproximadamente 5% de seu valor inicial. Exploraremos isso no próximo item. Mas, antes: observe que é esperado que o valor de τ diminua com o aumento do valor de k, concorda? Afinal, k é uma medida da eficiência com que o calor flui do corpo para a vizinhança.
d) Mostre que em $t = 2\tau$, a diferença de temperatura entre o corpo e a vizinhança é aproximadamente 14% de seu valor inicial (que é aproximadamente 37% de 37%), e que em $t = 3\tau$, a diferença de temperatura entre o corpo e a vizinhança é aproximadamente 5% de seu valor inicial (que é aproximadamente 37% de 14%).
e) Mostre que a cada intervalo de tempo $\Delta t = \tau$, a diferença de temperatura entre o corpo e a vizinhança cai pelo fator $1/e$ (que corresponde ao percentual aproximado de 37%).
f) Mostre que a lei do resfriamento de Newton também se aplica a temperaturas medidas em graus Celsius. A relação numérica entre a temperatura absoluta T, medida na escala Kelvin, e a tempertarura t_{C}, medida na escala Celsius, é a seguinte:

$$T = t_{\text{C}} + 273{,}15.$$

Incluindo as unidades (para os puristas):

$$T = (t_{\text{C}} + 273{,}15\,^{\text{o}}\text{C}) \cdot 1\,\text{K}/^{\text{o}}\text{C} = t_{\text{C}} \cdot 1\,\text{K}/^{\text{o}}\text{C} + 273{,}15\,\text{K}.$$

g) Resolva a equação diferencial (169) considerando $T_0 < T_{\text{viz}}$ - ou seja, supondo que a mesma equação diferencial se aplica ao *aquecimento* de um corpo em contato térmico com a vizinhança. Em seguida, esboce o gráfico de $T(t)$ *à mão*, para $t \geq 0$, indicando na figura as temperaturas T_0 e T_{viz}. Compare com o gráfico esboçado no item **b**.

Atividade 2-53: Na física, quase sempre trabalhamos com funções exponenciais de base e. Aqui ou ali usamos uma base 10, uma base 2 ..., mas isso corresponde a uma minoria dos casos, que, contudo, merece atenção. Nesta atividade exploraremos funções exponenciais com bases diferentes de e.
a) Analisemos, inicialmente, a função

$$y(t) = 5 \cdot 2^t.$$

Podemos pensar t como tempo, mas não vamos nos preocupar com unidades, por enquanto, certo? O valor inicial de y, em $t = 0$, é 5, e y tem seu valor duplicado a cada unidade de t. Veja:

$$\begin{aligned}
y(0) &= 5 \cdot 2^0 = 5, \\
y(1) &= 5 \cdot 2^1 = 5 \cdot 2 = 10, \\
y(2) &= 5 \cdot 2^2 = (5 \cdot 2) \cdot 2 = 10 \cdot 2 = 20, \\
y(3) &= 5 \cdot 2^3 = (5 \cdot 2^2) \cdot 2 = 20 \cdot 2 = 40,
\end{aligned}$$

e assim por diante. Modifique esta função para que o valor de y seja duplicado a cada 4 unidades de t, mantendo o valor inicial igual a 5.
b) Agora, modifique a função $y(t)$ do item **a** para que o valor de y seja triplicado a cada 4 unidades de t, mantendo o valor inicial igual a 5.
c) Modifique a função $y(t)$ do item **a** para que o valor de y caia à metade a cada 4 unidades de t, mantendo o valor inicial igual a 5.
d) Modifique a função $y(t)$ do item **a** para que o valor de y caia a um terço a cada 4 unidades de t, mantendo o valor inicial igual a 5.
e) Estamos prontos para o caso geral. *Qual é a função $y(t)$ cujo valor em $t = 0$ é y_0, e é multiplicado pelo fator b (com $0 < b \neq 1$) a cada τ unidades de t?* Antes de olhar a resposta no Apêndice A, teste sua resposta para os casos particulares trabalhados nos itens anteriores. Observe que a função $y(t)$ deste item está na forma adequada ao trabalho com unidades físicas. Se t é tempo, τ tem unidade de tempo; e y_0 tem a unidade de y, é claro. b é um número, sem unidade.
f) Agora, reescreva a função $y(t)$ encontrada no item **e** mudando a base da potência para e, mas sem alterar a função.
g) Vamos explorar uma aplicação. É observado que o número de casos de uma determinada doença vem dobrando a cada 7 dias, contados sempre ao meio-dia. Se essa tendência se mantém, e ao meio-dia de hoje foram noticiados um total de 20000 casos (acumuladamente), qual é a função $n(t)$ que descreve a evolução do número de casos com o tempo, a partir do dia de hoje? (Faça $t = 0$ para o dia de hoje.) Adicionalmente, calcule $\mathrm{d}n/\mathrm{d}t$ e $(\mathrm{d}n/\mathrm{d}t)|_{t=0}$.
h) Mais uma aplicação. É verificado, experimentalmente, que a atividade A de uma amostra radioativa (revise os itens **e** e **f** da Atividade 2-49) cai à metade a cada intervalo de tempo $\Delta t = T_{1/2}$. Podemos imediatamente escrever:

$$A(t) = A_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{1/2}} = A_0\, 2^{-t/T_{1/2}},$$

concorda? Reescrevendo a expressão para $A(t)$ mudando a base da potência para e, obtenha:

$$A(t) = A_0\, e^{-\lambda t},$$

com

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}.$$

Daí, temos

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda},$$

que foi a relação entre $T_{1/2}$ e λ que obtivemos no item **f** da Atividade 2-49. Muito bacana este item, não acha?

Atividade 2-54: No item **f** da Atividade 2-53, você mostrou que uma função $y(t) = y_0\, b^{t/\tau}$ (com $0 < b \neq 1$) pode ser reescrita com a base da potência sendo e:

$$y(t) = y_0\, b^{t/\tau} = y_0\, e^{(\ln b)t/\tau}.$$

Em geral, nossa preferência pela base e é que ela torna os cálculos mais simples; por exemplo, $[e^x]' = e^x$, enquanto $[b^x]' = b^x \ln b$ $(0 < b \neq 1)$ (veja a igualdade (147)).
a) Analogamente, a base de uma potência pode ser mudada de e para uma base b qualquer, apenas com a restrição de que b seja positivo e diferente de 1. Mostre que, sendo $0 < b \neq 1$, podemos reescrever $f(x) = Ae^{ax}$ como

$$f(x) = Ae^{ax} = Ab^{ax/\ln b}.$$

b) Sabemos que $f(x) = Ae^{ax} \implies f'(x) = aAe^{ax} = af(x)$. Partindo da igualdade $f(x) = Ab^{ax/\ln b}$, e fazendo uso da regra expressa em (147), mostre que também obtemos (como esperado) $f'(x) = af(x)$. Isso significa que a solução da equação diferencial $f'(x) = af(x)$ pode ser expressa tanto na forma $f(x) = Ae^{ax}$ como na forma $f(x) = Ab^{ax/\ln b}$, com $0 < b \neq 1$. Escolhemos, em geral, a primeira forma porque ela é mais simples. Analogamente, podemos escrever a solução da equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = c\, y$$

(veja a Atividade 2-50) na forma

$$y(x) = y_0\, e^{cx},$$

ou, equivalentemente, na forma

$$y(x) = y_0\, b^{cx/\ln b}.$$

Novamente: a primeira forma é mais simples, e daí a nossa preferência por ela, mas devemos estar cientes de que a base da potência não necessariamente precisa ser e. Por outro lado, observe que o número e está sempre presente: se não como a base da potência, então no "$\ln b$", nesta última expressão para $y(x)$ (pois $\ln b = \log_e b$). Essa presença do número e vem lá do desenvolvimento inicial relativo ao cálculo de $[\log_b x]'$, que nos levou às igualdades (108), (109) e (110), e depois às demais fórmulas envolvendo derivadas de funções logarítmicas e de funções exponenciais. Portanto, o número de Euler, e, desempenha um papel especial no cálculo com funções logarítmicas e exponenciais - seja ou não usado como base de uma potência; não se trata apenas de uma questão de simplificação das contas.
c) Mostre que podemos mudar a base da potência, em uma função como $y(t) = y_0\, b^{t/\tau}$ (com $0 < b \neq 1$), de b para $\tilde{b}$ (com $0 < \tilde{b} \neq 1$), desde que mudemos também a constante τ no expoente. Mais especificamente, mostre que

$$y(t) = y_0\, b^{t/\tau} = y_0\, \tilde{b}^{t/\tilde{\tau}}, \;\; \text{com } \tilde{\tau} = \tau \left(\frac{\ln \tilde{b}}{\ln b} \right).$$

Podemos reescrever:

$$y(t) = y_0\, b^{t/\tau} = y_0\, \tilde{b}^{t/\tilde{\tau}}, \;\; \text{com } \tau \text{ e } \tilde{\tau} \text{ assim relacionados: } \frac{\tilde{\tau}}{\ln \tilde{b}} = \frac{\tau}{\ln b}. \tag{172}$$

Adicionalmente, mostre que para que τ e $\tilde{\tau}$ tenham o mesmo sinal, as constantes b e $\tilde{b}$ têm que estar, ambas, no intervalo aberto $(0,1)$ ou no intervalo aberto $(1,\infty)$; do contrário, τ e $\tilde{\tau}$ têm sinais opostos.
d) O resultado em (172) é muito interessante! Consideremos, neste item, b e $\tilde{b}$ pertencentes,

ambos, ao intervalo $(0,1)$ ou ao intervalo $(1,\infty)$, e também que $\tau > 0$. De acordo com o que você mostrou ao final do item **c**, isso implica que $\tilde{\tau} > 0$. O resultado em (172) nos diz que *a função $y(t) = y_0\, b^{t/\tau}$, cujo valor inicial y_0 é multiplicado pelo fator b a cada τ unidades de t, tem seu valor inicial multiplicado pelo fator $\tilde{b}$ a cada $\tilde{\tau}$ unidades de t, sendo $\tilde{\tau} = \tau(\ln\tilde{b})/(\ln b)$.* Por exemplo, a função $y(t) = 2^t$, que tem seu valor inicial 1 duplicado a cada unidade de t, tem seu valor inicial triplicado a cada $(\ln 3)/(\ln 2)$ unidades de t, quadruplicado a cada $(\ln 4)/(\ln 2)$ unidades de t, quintuplicado a cada $(\ln 5)/(\ln 2)$ unidades de t, e assim por diante. Vamos denotar esses três valores respectivamente por τ_3, τ_4 e τ_5. Verifique a conclusão acima usando um aplicativo como o Geogebra. (Dica: trace, além do gráfico de $y(t) = 2^t$ (ou de $f(x) = 2^x$), retas verticais que cortam o eixo das abscissas nos seguintes pontos: τ_3, $2\tau_3$, $3\tau_3$; τ_4, $2\tau_4$, $3\tau_4$; τ_5, $2\tau_5$, $3\tau_5$.)

e) Agora, considere a função $y(t) = (1/3)^t$, cujo valor inicial 1 cai a um terço a cada unidade de t. O valor inicial desta função cai à metade a cada $\tau_{1/2}$ unidades de t, e a um quarto a cada $\tau_{1/4}$ unidades de t. Encontre $\tau_{1/2}$ e $\tau_{1/4}$, e teste os valores encontrados usando um aplicativo como o Geogebra.

f) Para concluir, mostre que não é apenas o valor inicial y_0 da função $y(t) = y_0\, b^{t/\tau}$ que é multiplicado pelo fator b a cada τ unidades de t: mostre que

$$\text{para todo } t \in \mathbb{R},\ \ y(t) = y_0\, b^{t/\tau} \implies y(t+\tau) = b\, y(t).$$

Em resumo, você mostrou que todas as funções exponenciais cujos valores duplicam em intervalos constantes de seu argumento também triplicam em intervalos constantes, quadruplicam em intervalos constantes, e assim por diante. E que todas as funções exponenciais cujos valores caem à metade em intervalos constantes de seu argumento também caem a um terço em intervalos constantes, a um quarto em intervalos constantes, e assim por diante. E aprendeu a relacionar esses intervalos constantes (veja (172)). É claro, não há nada de especial com "duplicar" ou "cair à metade"; podemos, por exemplo, dizer que todas as funções exponenciais cujos valores triplicam em intervalos constantes de seu argumento também duplicam em intervalos constantes. Tudo isso tem aplicações práticas imediatas - por exemplo, na análise da evolução do número de casos de uma determinada doença, como a COVID-19. Se o número de casos vem aumentando exponencialmente - por exemplo, duplicando regularmente a cada 7 dias -, podemos concluir que se o comportamento exponencial se mantiver, o número de casos será regularmente multiplicado por 10 a cada 23 dias, aproximadamente (verifique essa conta). A propósito, saiba que muitos físicos trabalharam com a modelagem dessa pandemia.

Atividade 2-55: Na Atividade 2-8 nos deparamos com uma equação diferencial do seguinte tipo (veja a equação (26)):

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = -a^2 y, \tag{173}$$

em que y é uma função de x, e a é uma constante não nula.[86] Aprendemos, com a realização da Atividade 2-8 e da Atividade 2-9, que a *solução geral* para uma equação diferencial desse tipo

[86] Temos, no segundo membro da equação (173), a constante negativa $-a^2$. Trata-se de uma forma conveniente de escrever essa constante, devido à sua relação com a constante a presente na solução geral (veja (174) e (175)). É claro que isso revela que já conhecemos a solução, percebe? Ou seja, possivelmente a equação diferencial (173) não teria sido escrita assim em um primeiro momento, mas, provavelmente, na forma $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 = cy$, em que c é uma constante negativa, ou na forma $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 = -cy$, em que c é uma constante positiva. Contudo, é comum, na matemática e na física, reescrevermos uma equação diferencial em uma forma mais "conveniente", uma vez conhecida sua solução. Saiba que muito do que é apresentado, tanto em livros quanto em aulas, como se fosse fruto de uma "primeira ideia" corresponde à enésima versão do desenvolvimento inicial. Primeiro, a pessoa desenvolve certas ideias; depois, ela estuda como apresentar aquelas ideias de forma mais interessante. Raramente a forma como um determinado desenvolvimento é apresentado - seja em uma aula, seja em um livro, ou em um artigo

pode ser expressa em uma das seguintes formas:

$$y(x) = A\cos(ax+b), \tag{174}$$

com $A > 0$, $a > 0$ e b arbitrário,[87] ou

$$y(x) = B_1 \cos ax + B_2 \operatorname{sen} ax, \tag{175}$$

com $B_1 \neq 0$ *ou* $B_2 \neq 0$, e com $a > 0$.
a) Vamos modificar a equação diferencial (173) para

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = a^2 y. \tag{176}$$

Agora estamos em busca de todas as funções $y(x)$ cujas derivadas segundas são iguais a elas mesmas multiplicadas pela constante *positiva* (essa é a novidade) a^2. Resolva a equação diferencial (176), lembrando que a solução geral deve conter duas constantes arbitrárias (porque a equação diferencial não determina $y(0)$, nem $y'(0)$). (Dica: comece propondo uma *solução tentativa* simples.)
b) Reescreva sua solução expressando as duas constantes arbitrárias em termos de $y_0 \equiv y(0)$ e $y_0' \equiv y'(0)$. Em seguida, verifique se você obtém, a partir de sua solução, $y(0) = y_0$ e $y'(0) = y_0'$. Você terá resolvido o *problema de valor inicial* constituído pela equação diferencial (176) e pelas *condições iniciais* $y(0) = y_0$ e $y'(0) = y_0'$, com y_0 e y_0' dados.

2.2.6 Cálculo com funções hiperbólicas e com funções hiperbólicas inversas

As chamadas *funções hiperbólicas* têm, com uma hipérbole, as mesmas relações que as funções trigonométricas têm com uma circunferência.[88] Exploraremos esse aspecto geométrico das funções hiperbólicas na Parte IV desta série. Aqui, bastará conhecermos as expressões que definem as funções hiperbólicas: a partir delas, obteremos tudo o mais nesta subseção (e nem todos os resultados postos em destaque precisam ser memorizados; alguns podem ser consultados, quando necessário). No processo, reconheceremos algumas semelhanças que as funções hiperbólicas têm com as funções trigonométricas - o que justificará seus nomes.

As funções

$$\boxed{\operatorname{senh} x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2}} \tag{177}$$

e

$$\boxed{\cosh x \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2}} \tag{178}$$

são denominadas, respectivamente, *seno hiperbólico* e *cosseno hiperbólico*. É interessante que você memorize estas duas definições.

científico - corresponde à sua versão inicial. O trabalho de reescrita, com vistas à didática, à clareza, à objetividade, etc., é muito importante no ensino e na ciência. Talvez falte apenas, algumas vezes, dizer isso aos estudantes, que, em sua inexperiência, olham para um resultado final como se fosse fruto de uma primeira ideia e dizem algo como "eu nunca teria pensado nisso!".

[87] Aprendemos, com a realização da Atividade 2-7, que a restrição de que A e a sejam constantes *positivas* não é realmente limitante, e que podemos usar, em (174), a função seno, no lugar da função cosseno.

[88] A propósito, as funções trigonométricas também são chamadas de *funções circulares*.

Atividade 2-56: a) Mostre que

$$\operatorname{senh} 0 = 0 \quad \text{e} \quad \cosh 0 = 1.$$

(Veja a semelhança com as funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, respectivamente, pois $\operatorname{sen} 0 = 0$ e $\cos 0 = 1$.)
b) Mostre que

$$\boxed{[\operatorname{senh} x]' = \cosh x \quad \text{e} \quad [\cosh x]' = \operatorname{senh} x.} \tag{179}$$

(Aqui, a semelhança não é completa, pois $[\operatorname{sen} x]' = \cos x$, mas $[\cos x]' = -\operatorname{sen} x$.)
c) Obtenha as seguintes identidades:

$$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x \quad \text{e} \quad \cosh(-x) = \cosh x \tag{180}$$

(compare com $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ e $\cos(-x) = \cos x$, respectivamente),

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \tag{181}$$

(compare com $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$),

$$\operatorname{senh}(a+b) = \operatorname{senh} a \cosh b \;+\; \operatorname{senh} b \cosh a \tag{182}$$

(compare com $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$),

$$\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b \;+\; \operatorname{senh} a \operatorname{senh} b \tag{183}$$

(compare com $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \cos b$).

Em princípio, você não precisa memorizar essas identidades. As duas primeiras, em (180), são fáceis de identificar (e, como veremos na Parte II-B desta série, nos dizem, respectivamente, que $\operatorname{senh} x$ é uma *função ímpar* e $\cosh x$ é uma *função par*). Quanto às demais, basta saber que elas existem (junto com outras, que não apresentamos aqui), e que você pode consultá-las, se necessário.

Atividade 2-57: As demais funções hiperbólicas podem ser definidas a partir de $\operatorname{senh} x$ e $\cosh x$ da mesma forma que $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ definem as demais funções trigonométricas (veja (18)), e por isso essas definições são fáceis de lembrar. Temos:

$$\boxed{\operatorname{tgh} x \equiv \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},} \tag{184}$$

$$\boxed{\operatorname{sech} x \equiv \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}},} \tag{185}$$

$$\boxed{\operatorname{cossech} x \equiv \frac{1}{\operatorname{senh} x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}},} \tag{186}$$

$$\boxed{\operatorname{cotgh} x \equiv \frac{1}{\operatorname{tgh} x} = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.} \tag{187}$$

A partir dessas definições, e fazendo uso dos resultados em (179), obtenha:

$$\boxed{[\operatorname{tgh} x]' = \operatorname{sech}^2 x} \tag{188}$$

(compare com $[\text{tg}\,x]' = \sec^2 x$),

$$\boxed{[\text{sech}\,x]' = -\,\text{sech}\,x\ \text{tgh}\,x} \tag{189}$$

(compare com $[\sec x]' = \sec x\ \text{tg}\,x$),

$$\boxed{[\text{cossech}\,x]' = -\,\text{cossech}\,x\ \text{cotgh}\,x} \tag{190}$$

(compare com $[\text{cossec}\,x]' = -\text{cossec}\,x\ \text{cotg}\,x$),

$$\boxed{[\text{cotgh}\,x]' = -\,\text{cossech}^2 x} \tag{191}$$

(compare com $[\text{cotg}\,x]' = -\text{cossec}^2 x$).

Atividade 2-58: Calcule as derivadas das funções abaixo, sendo A e a constantes arbitrárias.
a) $f(x) = A\,\text{tgh}\,ax$ **b)** $f(x) = A\,\text{senh}\,ax\cosh ax$ **c)** $f(x) = \ln(\cosh x)$

Atividade 2-59: **a)** Esboce à mão, em uma mesma figura, os gráficos das funções

$$f(x) = \frac{1}{2}e^x, \quad g(x) = \frac{1}{2}e^{-x} \quad \text{e} \quad h(x) = -\frac{1}{2}e^{-x},$$

e a partir deles esboce, ainda na mesma figura, o gráfico de $\cosh x$ (observando que $\cosh x = f(x) + g(x)$) e o gráfico de $\text{senh}\,x$ (observando que $\text{senh}\,x = f(x) + h(x)$). Verifique se seus esboços estão corretos usando um aplicativo como o Geogebra.
b) O gráfico de $\text{tgh}\,x$ pode ser esboçado a partir dos gráficos de $\text{senh}\,x$ e $\cosh x$. Convença-se, a partir dos gráficos de $\text{senh}\,x$ e $\cosh x$, de que a razão $\text{senh}\,x\,/\cosh x$ nos leva ao gráfico na Fig. 18. As duas linhas horizontais tracejadas, na figura, são *assíntotas*: elas indicam que $\text{tgh}\,x$ tende a 1 quando $x \to \infty$, e que $\text{tgh}\,x$ tende a -1 quando $x \to -\infty$. Trata-se de *assíntotas horizontais*. Vimos um exemplo de *assíntotas verticais* quando discutimos a Fig. 5, que mostra o gráfico da função $\text{tg}\,x$. Estudaremos assíntotas - verticais, horizontais e oblíquas - de forma um pouco mais técnica na Parte II-B desta série, mas se você entendeu bem o papel das linhas tracejadas na Fig. 5 e na Fig. 18, já captou a ideia, e será capaz de identificar, por exemplo, que a reta $y = 2$ é uma assíntota horizontal do gráfico da função $f(x) = e^x + 2$, e que a reta $x = 3$ é uma assíntota vertical do gráfico da função $f(x) = \ln(x - 3)$.

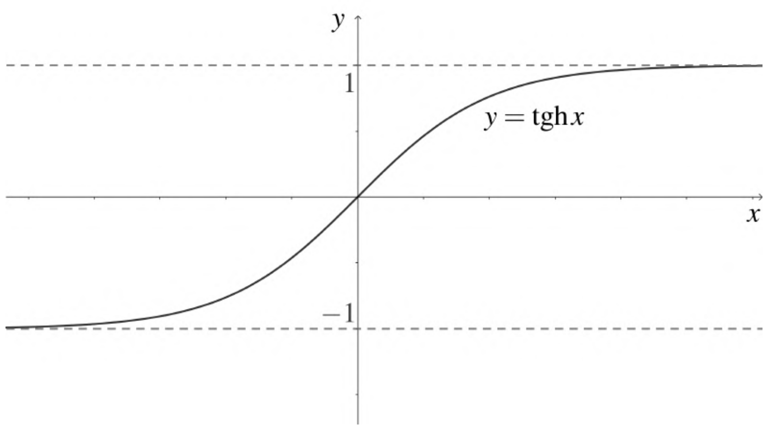


Figura 18: Gráfico de $\text{tgh}\,x$.

Atividade 2-60: a) Reescreva a função $y(x)$ obtida no item **b** da Atividade 2-55 com o uso das funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico. Em seguida, observe que essas funções tornam a expressão para $y(x)$ mais simples. Por fim, veja como fica um pouco mais fácil verificar que $y(0) = y_0$ e $y'(0) = y'_0$.
b) Volte à equação diferencial (173), reapresentada na Atividade 2-55, e considere sua solução na forma expressa em (175). Reescreva aquela solução expressando as duas constantes arbitrárias B_1 e B_2 em termos de $y_0 \equiv y(0)$ e $y'_0 \equiv y'(0)$. Daí compare a expressão obtida com aquela obtida acima, no item **a** (lembrando que trata-se de duas equações deferenciais diferentes). (Esperamos que você aprecie.)

Atividade 2-61: Esta atividade é uma continuação da Atividade 2-60. Estamos supondo que você acabou de realizá-la, ou que se lembra bem dela, ou que irá revisá-la, antes de realizar a atividade atual. Muito bem, a ideia aqui é refazer a Atividade 2-55, mas agora diretamente com o uso de funções hiperbólicas. É que ao realizar a Atividade 2-55 você provavelmente usou, em sua solução tentativa, uma função exponencial (ou uma combinação de funções exponenciais), e apenas realizando a Atividade 2-60 você reescreveu, com o uso de funções hiperbólicas, a solução para o problema de valor inicial constituído pela equação diferencial (176) e pelas condições iniciais $y(0) = y_0$ e $y'(0) = y'_0$, com y_0 e y'_0 dados. A ideia aqui é fazer uso de funções hiperbólicas já na solução tentativa, entende? Muito bem, faça isso. Resolva, com o uso de funções hiperbólicas desde o início, o problema de valor inicial constituído pela equação diferencial (176) e pelas condições iniciais $y(0) = y_0$ e $y'(0) = y'_0$, com y_0 e y'_0 dados.[89]

Atividade 2-62: A Fig. 19 apresenta os gráficos de $\operatorname{senh} x$ e $\cosh x$ (que você deve ter esboçado realizando a Atividade 2-59), e a Fig. 18 apresenta o gráfico de $\operatorname{tgh} x$. Perceba, a partir desses gráficos, que as funções $\operatorname{senh} x$ e $\operatorname{tgh} x$ possuem inversa, mas a função $\cosh x$ não. Contudo, embora a função $\cosh x$ não seja inversível, podemos restringir seu domínio para que a nova função assim obtida possua uma inversa. A escolha padrão é restringir o domínio do cosseno hiperbólico ao conjunto dos números reais não negativos.
a) Sua tarefa neste item é obter as expressões para as inversas das funções $\operatorname{senh} x$ e $\operatorname{tgh} x$, e a expressão para a inversa da função $\cosh_{\mathrm{r}} x$, definida aqui como o cosseno hiperbólico com o domínio restrito ao intervalo $[0, \infty)$. Denotando essas inversas respectivamente por $\operatorname{arcsenh} x$ (ou $\operatorname{senh}^{-1} x$), $\operatorname{arctgh} x$ (ou $\operatorname{tgh}^{-1} x$) e $\operatorname{arccosh} x$ (ou $\cosh^{-1} x$)[90], obtenha:

$$\boxed{\operatorname{arcsenh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \quad (x \in \mathbb{R}),} \tag{192}$$

$$\boxed{\operatorname{arccosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \quad (x \geq 1),} \tag{193}$$

$$\boxed{\operatorname{arctgh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (-1 < x < 1).} \tag{194}$$

[89] Veja que interessante: as funções $y(x) = A\cos rx$ e $y(x) = A\operatorname{sen} rx$ não são boas soluções tentativas para a equação diferencial (176), porque ao derivarmos duas vezes qualquer uma dessas funções obtemos $y''(x) = -r^2 y(x)$ - ou seja, obtemos uma constante negativa no segundo membro, e queremos que apareça lá a constante positiva a^2; mas com $y(x) = A\cosh rx$ ou $y(x) = A\operatorname{senh} rx$ obtemos $y''(x) = r^2 y(x)$. Perceba que a ausência do sinal de menos, nesta última igualdade, é consequência de termos $(\operatorname{senh} x)' = \cosh x$ e $(\cosh x)' = \operatorname{senh} x$ (sem o sinal de menos), enquanto $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$ e $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$ (com o sinal de menos).

[90] Rigorosamente, deveríamos escrever "$\cosh_{\mathrm{r}}^{-1} x$", em vez de "$\cosh^{-1} x$", concorda? Mas é um pequeno abuso de notação que é permitido.

(Estas expressões estão aqui para consulta; você não precisa memorizá-las.)
b) Lembrando que o gráfico de uma função inversível $f(x)$ e o gráfico de sua inversa $f^{-1}(x)$ são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, esboce os gráficos de arcsenh$x$, arccosh$x$ e arctgh$x$ a partir dos gráficos de senh$x$, cosh$x$ (para $x \geq 0$) e tgh$x$, respectivamente (veja as Figs. 18 e 19).
c) Verifique se seus esboços estão corretos usando um aplicativo como o Geogebra. Faça isso de duas formas: escrevendo no aplicativo as expressões "arcsenh(x)", "arccosh(x)" e "arctgh(x)" (ou similares - ou seja, as expressões que forem reconhecidas no aplicativo), e depois fazendo uso das expressões em (192), (193) e (194).

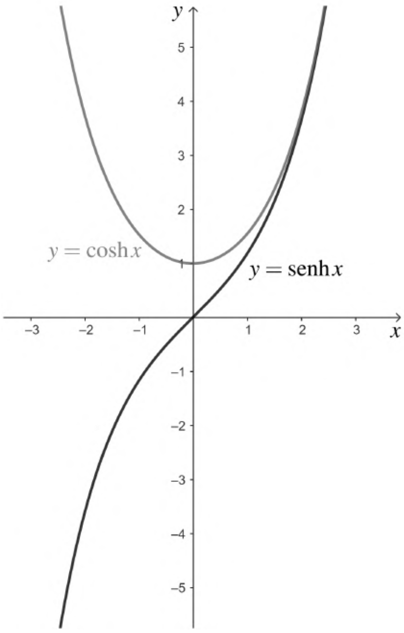


Figura 19: Gráficos de senh$x$ e cosh$x$.

Pesquise a respeito de funções inversas relacionadas às demais funções hiperbólicas, se for de seu interesse.

Atividade 2-63: a) A partir das expressões em (192), (193) e (194), obtenha:

$$\boxed{[\text{arcsenh}\,x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (x \in \mathbb{R}),} \tag{195}$$

$$\boxed{[\text{arccosh}\,x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x > 1),} \tag{196}$$

$$\boxed{[\text{arctgh}\,x]' = \frac{1}{1-x^2} \quad (-1 < x < 1).} \tag{197}$$

(Compare estes resultados - que não precisam ser memorizados - com aqueles em (76), (77) e (75), respectivamente.)
b) Alternativamente, obtenha as três expressões acima fazendo uso do que aprendeu, estudando a subseção 2.2.3, sobre *como calcular a derivada de uma função inversa*.[91]

[91] À primeira vista, o caminho seguido no item **a** parece um pouco mais simples que o caminho seguido no item **b** (veja se você concorda, porque há algum grau de subjetividade nesse tipo de análise). Contudo, o caminho seguido no item **b** tem a vantagem de não exigir o conhecimento prévio das expressões em (192), (193) e (194), percebe?

c) Convença-se de que seguem imediatamente das igualdades (195), (196) e (197) estes resultados (que não precisam ser memorizados):

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad F(x) = \text{arcsenh}\, x + C \quad (x \in \mathbb{R}),} \tag{198}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x > 1) \quad \Longrightarrow \quad F(x) = \text{arccosh}\, x + C \quad (x > 1),} \tag{199}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad (-1 < x < 1) \quad \Longrightarrow \quad F(x) = \text{arctgh}\, x + C \quad (-1 < x < 1),} \tag{200}$$

em que C é uma constante arbitrária.[92] (Compare com os resultados em (80), (81) e (79), respectivamente.)

d) É interessante observar que para não termos problema com a função $f(x) = 1/\sqrt{x^2-1}$, basta termos $x > 1$ *ou* $x < -1$. Contudo, a função $\text{arccosh}\, x$ só está definida (como você mesmo mostrou, no item **a** da Atividade 2-62) para $x \geq 1$. Então se você precisar calcular uma integral como

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, \mathrm{d}x,$$

só poderá fazer uso do resultado em (199) - associado ao *teorema fundamental do cálculo* - se o intervalo $[a,b]$ estiver contido no intervalo $(1,\infty)$. Vamos explorar isso neste item. Inicialmente, calcule, fazendo uso do resultado em (199), a seguinte integral (e só confira a resposta, no Apêndice A, após a conclusão deste item, certo?):

$$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, \mathrm{d}x.$$

Agora, usando um aplicativo como o Geogebra, esboce o gráfico da função $1/\sqrt{x^2-1}$, e explore sua simetria para calcular a seguinte integral:

$$\int_{-3}^{-2} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, \mathrm{d}x.$$

Mostre que não podemos fazer uso, diretamente, do resultado em (199).

e) Similarmente, observe que para não termos problema com a função $f(x) = 1/(1-x^2)$, basta termos $x \neq 1$ *e* $x \neq -1$. Contudo, a função $\text{arctgh}\, x$ só está definida (como você mesmo mostrou, no item **a** da Atividade 2-62) para $-1 < x < 1$. Então se você precisar calcular uma integral como

$$\int_a^b \frac{1}{1-x^2}\, \mathrm{d}x,$$

só poderá fazer uso do resultado em (200) - associado ao *teorema fundamental do cálculo* - se o intervalo $[a,b]$ estiver contido no intervalo aberto $(-1,1)$. Vamos explorar isso neste item. Inicialmente, calcule, fazendo uso do resultado em (200), a seguinte integral:

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1-x^2}\, \mathrm{d}x.$$

[92]Observe o seguinte detalhe: a função $\text{arccosh}\, x$ está definida para $x \geq 1$ (veja (193)); contudo, sua derivada só existe para $x > 1$ (veja (196)), e daí a restrição $x > 1$ para $F(x)$ em (199).

Agora, mostre que o uso incorreto do resultado em (200) para o cálculo da integral

$$\int_2^3 \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

leva a um resultado obviamente incorreto. Em seguida, calcule a integral acima usando o seguinte "truque" (que é uma aplicação do chamado *método das frações parciais*, que você aprenderá mais adiante): reescreva o integrando como

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x},$$

e determine as constantes A e B. Por fim, mostre que esse truque também pode ser usado para o cálculo da integral

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x,$$

e perceba que trata-se de um caminho mais simples (pois não exige o conhecimento ou a consulta do resultado em (200), nem da expressão para o arco tangente hiperbólico, em (194)). (Mas nem sempre o uso do método das frações parciais é o caminho mais interessante..., como você verá realizando a Atividade 2-66.)

Atividade 2-64: Voltemos às funções hiperbólicas. A partir das igualdades em (179), é imediato concluir que

$$\boxed{f(x) = \cosh x \quad \Longrightarrow \quad F(x) = \operatorname{senh} x + C} \tag{201}$$

e

$$\boxed{f(x) = \operatorname{senh} x \quad \Longrightarrow \quad F(x) = \cosh x + C,} \tag{202}$$

em que C é uma constante arbitrária. Mas quais são as antiderivadas da tangente hiperbólica? A propósito, também não obtivemos, ainda, as antiderivadas da tangente, percebeu? Então vamos, nesta atividade, obter as antiderivadas de $\operatorname{tg} x$ e as antiderivadas de $\operatorname{tgh} x$. Isso pode ser feito através do *método da substituição*, que veremos quando estudarmos *técnicas de integração*. Mas uma pequena sacada nos permite obter essas antiderivadas, como veremos a seguir.
a) Um pouco de experiência e/ou sagacidade pode sugerir que $\ln|\cos x|$ é uma boa candidata a antiderivada de $\operatorname{tg} x$. Explore isso, e daí obtenha:

$$\boxed{f(x) = \operatorname{tg} x \quad \Longrightarrow \quad F(x) = -\ln|\cos x| + C,} \tag{203}$$

em que C é uma constante arbitrária. Adicionalmente, mostre que podemos reescrever $-\ln|\cos x|$ como $\ln|\sec x|$. Portanto, alternativamente, temos:

$$\boxed{f(x) = \operatorname{tg} x \quad \Longrightarrow \quad F(x) = \ln|\sec x| + C.} \tag{204}$$

Mas a expressão em (203) para a antiderivada da tangente é mais fácil de lembrar, concorda?
b) De forma análoga, obtenha:

$$\boxed{f(x) = \operatorname{tgh} x \quad \Longrightarrow \quad F(x) = \ln(\cosh x) + C,} \tag{205}$$

em que C é uma constante arbitrária.

Analisamos o movimento de corpos sujeitos a forças de resistência do ar na Atividade 2-39, na Atividade 2-48 e na Atividade 2-51. Em todas elas nos limitamos a arrastos lineares. Exploraremos a seguir, na Atividade 2-65 e na Atividade 2-66, arrastos quadráticos.

Atividade 2-65: a) Considere que uma partícula de massa m se move ao longo do eixo x e está sujeita à ação de uma única força, com a direção do eixo x. De início, vamos assumir que $v_x > 0$ (lembrando que $v_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, em que x é a posição da partícula em função do tempo) e que a componente x da força única que age sobre a partícula é

$$f_x = -cv_x^2 \;\; (v_x > 0), \tag{206}$$

sendo c uma constante positiva. Uma força desse tipo é comumente chamada de *arrasto* - neste caso, um *arrasto quadrático*. Neste item, você obterá a função $v_x(t)$ resolvendo a *equação diferencial* que resulta da aplicação da *segunda lei de Newton* a essa partícula. Muito bem, seja F_{res_x} a componente x da força resultante sobre a partícula. A segunda lei de Newton nos diz que $F_{\mathrm{res}_x} = ma_x$, em que $a_x = \mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t$. Neste problema, temos $F_{\mathrm{res}_x} = f_x = -cv_x^2$ $(v_x > 0)$. Obtenha a seguinte igualdade:

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -\frac{c}{m}v_x^2 \;\; (v_x > 0). \tag{207}$$

Temos aqui nossa equação diferencial. Estamos em busca de todas as funções $v_x(t)$ que tornam a igualdade (207) uma sentença verdadeira. Resolva a equação diferencial (207) pelo método da separação de variáveis, supondo que em $t = 0$ temos $v_x = v_{x0} > 0$. Obtenha, ao final:

$$v_x(t) = \frac{v_{x0}}{1 + \left(\frac{c\,v_{x0}}{m}\right)t} \;\; (v_{x0} > 0 \;\text{ e }\; t \geq 0). \tag{208}$$

b) Usando um aplicativo como o Geogebra, trace o gráfico de $v_x(t)$ com $v_{x0} = 3\,\mathrm{m/s}$ e $c/m = 5\,\mathrm{m}^{-1}$ (verifique que esta unidade está correta), lembrando de fazer $t \geq 0$. Em seguida, varie o valor da razão c/m de 0 a $5\,\mathrm{m}^{-1}$ (use uma ferramenta do aplicativo, se houver), e observe se o que ocorre com o gráfico de $v_x(t)$ está de acordo com o esperado.
c) Mostre que a solução em (208) não se aplica ao caso $v_{x0} < 0$ traçando o gráfico $v_x(t)$ - a partir da expressão em (208) - com $v_{x0} = -3\,\mathrm{m/s}$ e $c/m = 5\,\mathrm{m}^{-1}$, e então observando que tal gráfico não faz sentido. A partir do gráfico traçado com o aplicativo no item **b**, esboce, à mão, o gráfico correto de $v_x(t)$, considerando $v_{x0} = -3\,\mathrm{m/s}$ e $c/m = 5\,\mathrm{m}^{-1}$.
d) Seu desafio, agora, é reescrever a expressão para f_x em (206) de modo que ela seja válida para $v_x < 0$ (mas não mais para $v_x > 0$). Em seguida, obtenha a equação diferencial correspondente para $v_x(t)$, e resolva-a. Por fim, usando um aplicativo como o Geogebra, trace o gráfico de $v_x(t)$ com $v_{x0} = -3\,\mathrm{m/s}$ e $c/m = 5\,\mathrm{m}^{-1}$ (lembrando de fazer $t \geq 0$), e verifique se esse gráfico corresponde ao que você esboçou à mão no item **c**.
e) A partir das duas expressões obtidas para $v_x(t)$, separadamente válidas para $v_{x0} > 0$ e para $v_{x0} < 0$, obtenha uma expressão única, que valha para todo v_{x0}. Adicionalmente, reescreva a expressão para f_x em (206) de modo que ela seja válida tanto para $v_x > 0$ como para $v_x < 0$.
f) Reescreva a expressão obtida para $v_x(t)$ no item **e**, agora considerando $v_{x0} = v_x(t_0)$; ou seja, substitua o "instante inicial" $t = 0$ por $t = t_0$.
g) Talvez alguém pergunte: podemos resolver a equação diferencial (207) propondo uma solução tentativa? Bem, não seria a forma mais comum de resolvê-la; mas sim, é possível. A dificuldade é enxergar qual seria uma solução tentativa razoável. Que tipo de função $v_x(t)$ tem derivada que é igual a ela mesma ao quadrado, multiplicada por uma constante negativa? Uma pessoa inspirada poderia propor:

$$v_x(t) = \frac{A}{B + Ct},$$

em que A, B e C são constantes. Sua tarefa neste item é mostrar que esta solução tentativa é suficiente para resolver o problema de valor inicial constituído pela equação diferencial (207) e

pela condição inicial $v_x(0) = v_{x_0}$. Você deve chegar à expressão para $v_x(t)$ em (208).
h) Integrando a função $v_x(t)$, obtenha a função $x(t)$, que dá a posição da partícula em um determinado instante t, a partir de $t = 0$. Trabalhe separadamente os casos $v_{x_0} > 0$ e $v_{x_0} < 0$, e denote a posição da partícula em $t = 0$ por x_0.
i) Este item é uma continuação do anterior. Fazendo uso da expressão para $v_x(t)$ obtida no item **e**, não precisamos trabalhar separadamente os casos $v_{x_0} > 0$ e $v_{x_0} < 0$. Faça isso, e mostre que a função $x(t)$ assim obtida recai naquelas obtidas no item anterior, nos casos $v_{x_0} > 0$ e $v_{x_0} < 0$.
j) Usando um aplicativo como o Geogebra, trace o gráfico de $x(t)$, para $t \geq 0$, considerando $x_0 = 0$, $v_{x_0} = 3\,\text{m/s}$ e $c/m = 5\,\text{m}^{-1}$. Observe - a partir da própria expressão para $x(t)$ - que enquanto no caso de arrasto linear a posição da partícula está sempre abaixo de um determinado valor (veja a Atividade 2-48, item **d**), aqui, com um arrasto quadrático, não há um limite superior para $x(t)$. Trata-se de uma diferença qualitativa importante entre esses dois tipos de movimento.[93]
k) Refaça a tarefa do item **j**, mas desta vez com $v_{x_0} = -3\,\text{m/s}$. Observe se o gráfico de $x(t)$ corresponde ao esperado.

Atividade 2-66: Nesta atividade, analisaremos o movimento de *queda* de uma partícula sujeita a um arrasto quadrático (além da força da gravidade, obviamente). O eixo vertical das posições será o eixo y.[94]
a) Convença-se de que escolhendo o eixo y *apontando para cima*, a componente y da força resultante sobre o corpo, de massa m, pode ser expressa como[95]

$$F_{\text{res}_y} = -cv_y|v_y| - mg, \tag{209}$$

em que c é uma constante positiva, v_y é a componente y da velocidade da partícula (ou seja, $v_y = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$, em que y é a posição da partícula em função do tempo), e g é o módulo da aceleração da gravidade local. (Esta expressão para F_{res_y} vale para v_y positivo, negativo ou nulo.) Daí, como $a_y \equiv \mathrm{d}v_y/\mathrm{d}t = F_{\text{res}_y}/m$ (pela segunda lei de Newton), obtenha a seguinte equação diferencial para $v_y(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -\frac{c}{m}v_y|v_y| - g. \tag{210}$$

b) Resolver o problema de valor inicial constituído pela equação diferencial (210) e pela condição inicial $v_y(0) = v_{y_0}$ não é tarefa simples. Então vamos considerar apenas o caso particular em que a partícula tem velocidade nula em $t = 0$ - ou seja, que a partícula é *largada a partir do repouso*, em $t = 0$. Mostre que, nesse caso particular, a equação diferencial (210) fica:

$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{c}{m}v_y^2 - g. \tag{211}$$

c) Vamos resolver por partes o problema de valor inicial constituído pela equação diferencial (211) e pela condição inicial $v_y(0) = v_{y_0} = 0$. Neste item, fazendo uso do método da separação

[93] Devemos praticar esse tipo de análise. Não devemos nos contentar a simplesmente obter um determinado resultado. Por exemplo, uma vez calculada uma função $x(t)$, devemos explorá-la, extraindo dela tudo o que for possível (de forma compatível com o tempo de que dispomos, é claro).
[94] O problema mais geral de *lançamento vertical* de uma partícula sujeita a um arrasto quadrático é bem mais complicado, e não iremos abordá-lo aqui. Ou seja, em vez de considerarmos uma velocidade inicial v_{y_0} qualquer (positiva, negativa ou nula), trabalharemos apenas o caso particular em que $v_{y_0} = 0$ - que, como você verá, já é bem desafiador.
[95] Se necessário, revise o item **e** da Atividade 2-65, para entender a forma como f_y está aqui escrita: $f_y = -cv_y|v_y|$.

de variáveis, obtenha a seguinte igualdade:

$$\int_0^{v_y} \frac{\mathrm{d}\tilde{v}_y}{1-\frac{c\tilde{v}_y^{\,2}}{mg}} = -gt, \tag{212}$$

que pode ser convenientemente reescrita como

$$\int_0^{v_y} \frac{\mathrm{d}\tilde{v}_y}{1-\left(\sqrt{\frac{c}{mg}}\,\tilde{v}_y\right)^2} = -gt. \tag{213}$$

d) Podemos calcular a integral em (213) de duas formas, basicamente: fazendo uso do resultado em (200), ou através do método das frações parciais, exemplificado no item **e** da Atividade 2-63. Neste item, vamos explorar a primeira opção. Mas há um detalhe de fundamental importância: só podemos fazer uso do resultado em (200) se tivermos

$$-1 < \sqrt{\frac{c}{mg}}\,\tilde{v}_y < 1,$$

concorda? Então, primeiro, precisamos mostrar que os valores que $\tilde{v}_y$ pode assumir satisfazem esta dupla desigualdade. Vamos lá. Como temos, aqui, $v_{y_0} = 0$, e o eixo y aponta para cima, podemos concluir que $\tilde{v}_y \leq 0$ para $t \geq 0$, certo? Portanto, a desigualdade

$$\sqrt{\frac{c}{mg}}\,\tilde{v}_y < 1$$

já está garantida. Basta então mostrar que

$$-1 < \sqrt{\frac{c}{mg}}\,\tilde{v}_y,$$

ou, equivalentemente, que

$$\tilde{v}_y > -\sqrt{\frac{mg}{c}},$$

ou, ainda, que

$$|\tilde{v}_y| < \sqrt{\frac{mg}{c}}.$$

Faça isso calculando a "velocidade terminal", v_{ter}, igualando o módulo do peso da partícula ao módulo da força de resistência do ar sobre a mesma.[96] Daí, com a segurança de que o resultado em (200) pode ser usado, obtenha, a partir de (213):

$$\sqrt{\frac{mg}{c}}\,\mathrm{arctgh}\left(\sqrt{\frac{c}{mg}}\,v_y\right) = -gt. \tag{214}$$

e) Resolva a equação (214) para v_y, obtendo, finalmente, a solução para o problema de valor inicial constituído pela equação diferencial (211) e pela condição inicial $v_y(0) = 0$:

$$v_y(t) = -\sqrt{\frac{mg}{c}}\,\mathrm{tgh}\left(\sqrt{\frac{c}{mg}}\,gt\right). \tag{215}$$

[96]Lembre-se de que a velocidade terminal é definida como o valor para o qual tende *o módulo* de v_y quando $t \to \infty$. Trata-se de um limite. Teoricamente temos, sempre, $|v_y| < v_{\text{ter}}$.

(Dica: $\text{tgh}\,(-x) = -\text{tgh}\,x$.) Em seguida, verifique que $v_y(0) = 0$, e que $|v_y|$ tende a v_{ter} (calculada no item **d**) quando $t \to \infty$. Por fim, esboce à mão o gráfico de $v_y(t)$.
f) Agora, vá da igualdade (213) à igualdade (214) fazendo uso do método das frações parciais (exemplificado no item **e** da Atividade 2-63). (Observe, ao final, que se trata de um caminho mais longo, e mais difícil, pois exige o conhecimento da igualdade (194).)
g) Neste item, sua tarefa é ir da igualdade (213) à igualdade (215) sem passar pela igualdade (214). Faça isso com o uso do método das frações parciais, aproveitando os cálculos que você realizou no item anterior. (Dica 1: o desenvolvimento ocorrerá bem mais rapidamente se você usar uma letra - digamos, ξ - para representar a quantidade $\sqrt{\frac{c}{mg}}\,v_y$, e outra - digamos, τ - para representar a quantidade $2\sqrt{\frac{c}{mg}}\,gt$. Acostume-se a usar esse tipo de recurso, quando necessário. Dica 2: uma pequena manipulação será necessária para que surja uma expressão que resultará em $\text{tgh}\,(\tau/2)$.)
h) A partir da expressão obtida para $v_y(t)$, obtenha a função $y(t)$, que dá a posição da partícula em um determinado instante t, a partir de $t = 0$. Faça $y(0) = y_0$.
i) Mudando o "instante inicial" de $t = 0$ para $t = t_0$ - ou seja, considerando agora que $v_y(t_0) = v_{y_0} = 0$ e $y(t_0) = y_0$ -, como ficam as expressões para $v_y(t)$ e $y(t)$? Não refaça as contas!
j) Escolhendo o eixo *y apontando para baixo*, como ficam as expressões para $v_y(t)$ e $y(t)$? Não refaça as contas, e considere t_0 não necessariamente igual a zero.

Atividade 2-67: Há diferentes tipos de materiais magnéticos. Todos eles respondem de alguma forma a um campo magnético externo. Os materiais ferromagnéticos, como o ferro, o níquel e o cobalto, são fortemente magnetizados quando submetidos a um campo magnético externo, e mantêm seu magnetismo quando o campo externo é removido - ou seja, se comportam como um ímã, mesmo após a remoção do campo externo. Já os materiais paramagnéticos, como o alumínio e a platina, são fracamente magnetizados quando submetidos a um campo magnético externo, e seu magnetismo desaparece quando o campo externo é removido. (Pesquise a respeito de outros tipos de materiais magnéticos.) A *magnetização M* - que, na verdade, é uma grandeza vetorial, sendo M seu módulo - é uma medida de quão magnetizado está um material, e um material fortemente magnetizado se comporta como o bom ímã (enquanto a magnetização se mantiver). Quando estudar mecânica estatística, você provavelmente será exposto, ou exposta, a um modelo muito simples de um sólido paramagnético: o chamado *paramagneto de spin* $1/2$. Ao final do desenvolvimento desse modelo, você obterá a seguinte expressão para a magnetização M do sólido paramagnético:

$$M = \frac{N\mu_B}{V}\,\text{tgh}\left(\frac{\mu_B B_{\text{ext}}}{kT}\right), \tag{216}$$

em que N é o número de átomos com propriedades magnéticas no sólido, V é o volume do sólido, μ_B é o chamado *magneton de Bohr* - definido como $\mu_B = e\hbar/(2m_{\text{e}})$, sendo e o módulo da carga do elétron, m_{e} a massa do elétron, e $\hbar \equiv h/(2\pi)$, em que h é a constante de Planck -, B_{ext} é o módulo do campo magnético externo aplicado, k é a constante de Boltzmann, e T é a temperatura absoluta do sólido. Não se deixe impressionar, nem distrair, por todos esses detalhes; para realizar esta tarefa, você não precisa saber de tudo isso. Tudo isso só fará realmente sentido quando você estudar eletrodinâmica clássica, mecânica quântica e mecânica estatística. Sua tarefa, nesta atividade, é analisar o papel do campo magnético externo aplicado, B_{ext}, e o papel da temperatura, T, na magnetização M do sólido paramagnético.
a) Você conhece o gráfico da função tangente hiperbólica. A partir dele, e considerando uma temperatura T fixa, esboce à mão o gráfico de M *versus* B_{ext}, para $B_{\text{ext}} \geq 0$. Em seguida, responda: há um limite superior para a magnetização do sólido, segundo esse modelo? E ainda: com a

remoção do campo externo, qual é a magnetização do sólido?
b) Como explicar, da forma mais direta possível, que esse modelo não se aplica a um sólido ferromagnético?
c) Como M varia com T, mantido fixo o campo magnético externo aplicado? Em particular, analise o que ocorre com M quando $T \to 0$ e quando $T \to \infty$. (Dica: neste item, continue explorando o gráfico da tangente hiperbólica - observando o que ocorre com o argumento da tangente hiperbólica, em (216), quando $T \to 0$ e quando $T \to \infty$.)
d) Agora, usando um aplicativo como o Geogebra, trace o gráfico da função $f(x) = \text{tgh}\,(1/x)$, e, a partir desse gráfico, verifique se o que você obteve no item **b** está correto.

No início desta subseção dissemos que as funções hiperbólicas têm, com uma hipérbole, as mesmas relações que as funções trigonométricas têm com uma circunferência, e que exploraremos esse aspecto geométrico das funções hiperbólicas na Parte IV desta série. E vimos que há semelhanças entre resultados envolvendo funções hiperbólicas e resultados envolvendo funções trigonométricas. Mas saiba que essas duas famílias de funções se relacionam de forma mais direta quando fazemos uso de números complexos - o que é incrível! Por exemplo, com $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$\cosh(ix) = \cos x \quad \text{e} \quad \text{senh}\,(ix) = i\,\text{sen}\,x.$$

Estamos dizendo isso apenas para estimular sua curiosidade; só começaremos a usar números complexos na Parte V desta série.

2.3 Aproximação linear local com novas funções elementares, e aproximações de ordem superior

Atividade 2-68: Em nosso estudo inicial de *aproximação linear local* obtivemos a seguinte aproximação para $f(x+\Delta x)$, sendo f uma função bem comportada:[97]

$$\boxed{f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \quad \text{(para } \Delta x \text{ suficientemente pequeno).}} \tag{217}$$

E obtivemos, como alternativas, as seguintes aproximações:

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x \quad \text{(para } \Delta x \text{ suficientemente pequeno);} \tag{218}$$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) \quad \text{(para } x - x_0 \text{ suficientemente pequeno);} \tag{219}$$

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)\,x \quad \text{(para } x \text{ suficientemente pequeno).} \tag{220}$$

Todas essas expressões trazem a mesma ideia básica, que, se bem compreendida, nos leva a escrever diretamente qualquer uma delas, conforme a conveniência do momento. Em seguida, obtivemos, como uma aplicação direta da aproximação (217), a importante *aproximação binomial*:[98]

$$\boxed{(1 \pm \varepsilon)^n \approx 1 \pm n\varepsilon \quad (\text{para } n \in \mathbb{R}^* \ \text{ e } \ 0 < \varepsilon \ll 1).} \tag{221}$$

[97]Faz sentido usarmos a expressão "para Δx suficientemente pequeno" mesmo com Δx negativo. Neste caso, o que temos em mente é o módulo de Δx.

[98]Ainda não provamos que a regra da potência (para o cálculo de derivadas) é válida para expoentes irracionais; e tal regra é usada na dedução da aproximação binomial. Portanto, rigorosamente, ainda não provamos que a aproximação binomial vale para n irracional. Mas faremos a demonstração da regra da potência para expoentes irracionais na subseção 2.4.

a) Agora, obtenha as seguintes aproximações lineares locais, a partir de (220) (que é a expressão mais adequada para esta tarefa):

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x &\approx x && (\text{para } |x| \ll 1);\\
\operatorname{tg} x &\approx x && (\text{para } |x| \ll 1);\\
e^x &\approx 1+x && (\text{para } |x| \ll 1);\\
\ln(1+x) &\approx x && (\text{para } |x| \ll 1);\\
\operatorname{senh} x &\approx x && (\text{para } |x| \ll 1);\\
\operatorname{tgh} x &\approx x && (\text{para } |x| \ll 1);\\
\operatorname{arcsen} x &\approx x && (\text{para } |x| \ll 1);\\
\arccos x &\approx \tfrac{\pi}{2} - x && (\text{para } |x| \ll 1);\\
\operatorname{arctg} x &\approx x && (\text{para } |x| \ll 1).
\end{aligned} \tag{222}$$

Duas observações, antes de passarmos ao item **b**. Obtivemos a aproximação linear local acima para a função seno lá atrás, lembra? Mas fizemos isso de forma geométrica; veja a aproximação (13), e revise o desenvolvimento que nos levou até ela. A segunda observação tem a ver com o termo "aproximação linear local". Sabemos que $f(x) = ax$, com $a \neq 0$, é uma função *linear*, mas $g(x) = ax + b$, com $b \neq 0$, *não* é linear (revise a subseção 2.2.1). Assim, das nove aproximações em (222), duas não são, rigorosamente, lineares: a aproximação para e^x e a aproximação para $\arccos x$. De fato, a aproximação para $f(x+\Delta x)$, em (217), só é linear, rigorosamente, para um valor de x tal que $f(x) = 0$. Portanto, o termo "aproximação linear local", aplicado a $f(x+\Delta x)$, em (217), não está rigorosamente correto, no caso geral, mas é comumente usado. Podemos corrigir isso (se você fizer questão) reescrevendo (217) como

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x \quad (\text{para } \Delta x \text{ suficientemente pequeno}),$$

e aí podemos dizer, corretamente, que se trata de uma aproximação linear local para $f(x+\Delta x) - f(x)$, concorda? Ou então podemos usar outro termo para a aproximação (217): um termo muito usado é "*aproximação de primeira ordem*" (em Δx, para $f(x+\Delta x)$), por ser igual a 1 o expoente de Δx no segundo membro de (217). Se o maior expoente para Δx fosse 2, teríamos uma aproximação de segunda ordem; e assim por diante. Muito bem, passemos ao item **b**.
b) Usando um aplicativo como o Geogebra, trace, separadamente, os gráficos das nove funções nos membros esquerdos de (222). Daí, em cada uma das nove figuras, trace também o gráfico da função afim correspondente à direita, em (222), para constatar que ela de fato aproxima bem a função à esquerda para $|x| \ll 1$. E observe, nas figuras, que a condição $|x| \ll 1$ pode ter um significado um pouco diferente, de um caso para outro.

Atividade 2-69: Observe o gráfico da função $\cos x$. Como a reta tangente ao gráfico dessa função, no ponto de abscissa $x = 0$, é paralela ao eixo x, não existe uma aproximação linear local para $\cos x$ a partir de $x = 0$, entende? Mas há uma *aproximação quadrática*, também chamada de *aproximação de segunda ordem*. Você irá obtê-la, nesta atividade.
a) Usando um aplicativo como o Geogebra, trace o gráfico de $\cos x$. Perceba que, em torno de $x = 0$, tal gráfico pode ser aproximado pelo gráfico da função $f(x) = 1 - ax^2$, com $a > 0$; ou seja, por uma parábola. Usando o mesmo aplicativo, trace, junto com o gráfico de $\cos x$, o gráfico de $f(x)$, com o parâmetro a livre para ser modificado. Então, manualmente, tente obter o valor de a que faz com que o gráfico de $f(x)$ melhor aproxime o gráfico de $\cos x$ em torno de $x = 0$. Ou seja, tente obter, manualmente, a melhor aproximação

$$\cos x \approx 1 - ax^2, \quad \text{para } |x| \ll 1.$$

b) É claro, não há rigor no método usado no item **a**. Veremos, a seguir, uma forma analítica de determinar o melhor valor para a. As funções $\cos x$ e $f(x) = 1 - ax^2$ são iguais para $x = 0$ (ou seja, têm a mesma imagem para $x = 0$), e suas derivadas também são iguais para $x = 0$. Mas as derivadas segundas de $\cos x$ e $f(x) = 1 - ax^2$ não são necessariamente iguais para $x = 0$. *Se tiverem a mesma derivada segunda para $x = 0$, as inclinações de suas retas tangentes irão variar de forma semelhante, em torno de $x = 0$*, e isso fará com que os gráficos destas duas funções se confundam, perto de $x = 0$. Então determine o valor de a que torna iguais as derivadas segundas de $\cos x$ e $f(x) = 1 - ax^2$ para $x = 0$. Com isso, obtenha:

$$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 \quad (\text{para } |x| \ll 1). \tag{223}$$

Você obteve a aproximadamente igual a 0,5 no item **a**? Se não, faça $a = 0{,}5$, no aplicativo, e observe como o gráfico de $f(x) = 1 - ax^2$ se ajusta bem ao gráfico de $\cos x$, para $|x| \ll 1$.
c) Há outra forma de obtermos a aproximação acima. A partir da identidade

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1,$$

expresse $\cos x$ em termos de $\operatorname{sen} x$ - lembrando que estamos interessados no caso em que $|x| \ll 1$, e para $|x| \ll 1$ temos $\cos x > 0$. Em seguida, use a aproximação $\operatorname{sen} x \approx x$ (para $|x| \ll 1$), combinada com a aproximação binomial, para obter a aproximação (223). (Esperamos que você aprecie este caminho alternativo.)

Atividade 2-70: Refaça a Atividade 2-69, mas com a função $\cosh x$ no lugar da função $\cos x$, e com uma expressão mais adequada para a função polinomial do segundo grau $f(x)$. No item **c**, faça uso da identidade $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$ (veja (181)).

Atividade 2-71: Como melhorar a aproximação para $\operatorname{sen} x$, em torno de $x = 0$? O gráfico de $\operatorname{sen} x$ tem uma simetria que não sugere acrescentarmos à aproximação linear $\operatorname{sen} x \approx x$ (para $|x| \ll 1$) um termo quadrático em x, mas sugere o acréscimo de um termo cúbico. Observe que o gráfico da função bx^3, com $b \neq 0$, tem o mesmo tipo de simetria que o gráfico da função $\operatorname{sen} x$. Trata-se do tipo de simetria que têm os gráficos das funções ímpares.
Vamos fazer uma pequena digressão. Dizemos que uma função $f(x)$ é *ímpar* se, para todo x em seu domínio, $f(-x) = -f(x)$. Dizemos que uma função $f(x)$ é *par* se, para todo x em seu domínio, $f(-x) = f(x)$. Você pode facilmente mostrar que $\operatorname{sen} x$ e bx^3 (com $b \neq 0$) são funções ímpares, enquanto $\cos x$ e ax^2 (com $a \neq 0$) são funções pares. Também é fácil mostrar que uma função cx^n, com $c \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$, é uma função ímpar se o número natural n é ímpar, e é uma função par se o número natural n é par. Assim, as aproximações para $\operatorname{sen} x$ devem envolver apenas potências x^n de expoente n ímpar, e as aproximações para $\cos x$ devem envolver apenas potências x^n de expoente n par. Isso também vale, é claro, para as demais funções ímpares e para as demais funções pares, respectivamente.
Continuando, queremos determinar o valor de b que torna a aproximação

$$\operatorname{sen} x \approx x + bx^3 \quad (\text{para } x \text{ em torno de zero})$$

a melhor possível. Trata-se de uma *aproximação de terceira ordem* em x. A ideia básica permanece a mesma que na Atividade 2-69 e na Atividade 2-70: as funções $\operatorname{sen} x$ e $f(x) = x + bx^3$ são iguais para $x = 0$, suas derivadas são iguais para $x = 0$, e suas derivadas segundas também são iguais para $x = 0$ (verifique);[99] então *se forem iguais suas derivadas terceiras para $x = 0$ - que expressam as taxas de variação de suas derivadas segundas em $x = 0$ -, teremos a melhor aproximação de terceira ordem para* $\operatorname{sen} x$*, em torno de $x = 0$.*

[99]Observe que se tivéssemos escrito $f(x) = x + ax^2 + bx^3$, a condição de que $\operatorname{sen} x$ e $f(x)$ devem ter a mesma derivada segunda para $x = 0$ teria nos levado a concluir que a tem que ser igual a 0.

a) Determine o valor de b que torna iguais as derivadas terceiras de $\operatorname{sen} x$ e $f(x) = x + bx^3$ para $x = 0$, e com isso obtenha:

$$\operatorname{sen} x \approx x - \frac{1}{6}x^3 \quad (\text{para } x \text{ em torno de zero}). \tag{224}$$

b) Use um aplicativo como o Geogebra para conferir a qualidade desta aproximação, e para dar um significado mais preciso à expressão “para x em torno de zero”, em (224).

Atividade 2-72: Nesta atividade, você obterá uma aproximação de terceira ordem para a função e^x, em torno de $x = 0$. Estamos interessados nos valores de a_0, a_1, a_2 e a_3 que tornam a aproximação

$$e^x \approx a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \quad \text{para } x \text{ em torno de zero}, \tag{225}$$

a melhor possível. Tendo realizado a Atividade 2-68, você já sabe que a melhor aproximação de primeira ordem para e^x é $1 + x$ (veja (222)); assim, é de se esperar que tenhamos $a_0 = 1$ e $a_1 = 1$, acima. Mas vamos desconsiderar este conhecimento prévio, e atacar o problema do início. A ideia geral é que *a função $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ é a melhor aproximação de terceira ordem para a função e^x, em torno de $x = 0$, se, para $x = 0$, estas duas funções são iguais, suas derivadas são iguais, suas derivadas segundas são iguais, e suas derivadas terceiras são iguais*. Faz sentido, não é?
a) Partindo disso, obtenha:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \quad (\text{para } x \text{ em torno de zero}), \tag{226}$$

sendo esta a melhor aproximação de terceira ordem para a função e^x, em torno de $x = 0$.
b) Use um aplicativo como o Geogebra para identificar, aproximadamente, o intervalo $[a, b]$ no qual a aproximação acima é boa. É claro, existe um certo grau de subjetividade nesta análise; discuta com seus colegas, se possível.

Atividade 2-73: a) Seguindo a mesma ideia apresentada na Atividade 2-72, obtenha a melhor aproximação de terceira ordem para a função $\ln(1 + x)$, em torno de $x = 0$:

$$\ln(1 + x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad (\text{para } x \text{ em torno de zero}). \tag{227}$$

b) A expressão “para x em torno de zero” em (227) tem, *a priori*, um sentido mais restritivo que em (226), porque enquanto a função e^x está definida para todo x real, a função $\ln(1 + x)$ só está definida para $x > -1$. Use um aplicativo como o Geogebra para identificar, aproximadamente, o intervalo $[a, b]$ no qual a aproximação acima é boa - lembrando que existe um certo grau de subjetividade nesta análise, e observando que a tem que ser maior que -1.
c) Obtenha a melhor aproximação de terceira ordem para a função $\ln(1 - x)$, em torno de $x = 0$:

$$\ln(1 - x) \approx -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) \quad (\text{para } x \text{ em torno de zero}). \tag{228}$$

Mas faça isso a partir da aproximação em (227). Ou seja, não faça todas as contas do início, como no item **a**; em vez disso, parta do resultado obtido no item **a**. E observe que $\ln(1 - x)$ só está definida para $x < 1$.

Atividade 2-74: Temos, em (221), uma aproximação de primeira ordem em ε para $(1 \pm \varepsilon)^n$ - a importante *aproximação binomial*.

a) Sua tarefa inicial, nesta atividade, é obter uma aproximação de terceira ordem para $(1\pm\varepsilon)^n$, com $n\in\mathbb{R}^*$ e $0<\varepsilon<1$.[100] (Dica: obtenha uma aproximação de terceira ordem para $(1+x)^n$, e depois faça $x=\pm\varepsilon$.)
b) Mostre que a aproximação obtida no item **a** fornece resultados *exatos*, e conhecidos, nos casos $n=0$, $n=1$, $n=2$ e $n=3$. Portanto, nestes casos, o uso do sinal de aproximação, "$\approx$", deve ser substituído por um sinal de igualdade. E não temos, aqui, nenhuma surpresa. Considere, por exemplo, o caso $n=2$. Qual é o polinômio de grau ≤ 3 que melhor aproxima $(1\pm\varepsilon)^2$? Ora, você conhece este produto notável: $(1\pm\varepsilon)^2=1\pm2\varepsilon+\varepsilon^2$; portanto, o polinômio obtido no item **a** tem que ser $1\pm2\varepsilon+\varepsilon^2$, se $n=2$.
c) Obtenha, a partir da aproximação de terceira ordem para $(1\pm\varepsilon)^n$ obtida no item **a**, a seguinte aproximação de terceira ordem para $\sqrt{1\pm\varepsilon}$:

$$\sqrt{1\pm\varepsilon}\approx 1\pm\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^2}{8}\pm\frac{\varepsilon^3}{16},\quad \text{com } \varepsilon \text{ suficientemente próximo de zero.} \tag{229}$$

d) Teste a qualidade da aproximação (229) traçando, em um aplicativo como o Geogebra, os gráficos de $\sqrt{1+x}$ e $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}$. Ou seja, dê um significado mais preciso à expressão "com ε suficientemente próximo de zero", em (229).
e) Fazendo uso da aproximação (229), obtenha a seguinte aproximação:

$$\sqrt{x\pm\delta}\approx\sqrt{x}\left(1\pm\frac{\delta}{2x}-\frac{\delta^2}{8x^2}\pm\frac{\delta^3}{16x^3}\right), \tag{230}$$

com $x>0$ e δ positivo e suficientemente menor x. Adicionalmente, sabendo que a aproximação (229) fornece bons resultados se $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, aproximadamente, mostre que *a aproximação (230) fornece bons resultados se* $0<\delta<\frac{x}{2}$*, aproximadamente*.
f) Analise a qualidade da aproximação (230) - sabendo que ela fornece bons resultados se $0<\delta<\frac{x}{2}$, aproximadamente - usando-a para calcular as seguintes raízes quadradas - sempre comparando o resultado obtido com o que fornece uma calculadora eletrônica: $\sqrt{4{,}01}$, $\sqrt{3{,}99}$, $\sqrt{4{,}1}$, $\sqrt{3{,}9}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{90}$ e, por último, $\sqrt{2}$.

Atividade 2-75: a) Seja m um número inteiro positivo. Mostre que todas as derivadas de x^m de ordem superior a m são nulas.
b) Seja

$$P_{\leq n}(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n$$

uma função polinomial de grau $\leq n$. (Para simplificar, leia "$P_{\leq n}(x)$" simplesmente como "P de x". E se quiser simplificar também a escrita, troque "$P_{\leq n}(x)$" por "$P(x)$".) Use o resultado do item **a** para mostrar que todas as derivadas de $P_{\leq n}(x)$ de ordem superior a n são nulas.
c) Seja $f(x)$ uma função bem comportada em todo o seu domínio, e considere que esse domínio inclui o número zero. Qual é a função polinomial de grau $\leq n$ que melhor aproxima $f(x)$ em torno de $x=0$? Ou seja, quais são os valores de a_0, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n que tornam a aproximação

$$f(x)\approx a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n,$$

[100] Com $\varepsilon\geq1$ podemos ter problemas em $(1\pm\varepsilon)^n$, dependendo do valor de n, e então podemos justificar, já de início, a restrição $0<\varepsilon<1$. Por exemplo, a expressão $(1-\varepsilon)^n$ não está definida para $\varepsilon=1$ se n é negativo, e não está definida para $\varepsilon>1$ com, digamos, $n=1/2$. Contudo, embora possamos ter $\varepsilon\geq1$ em $(1\pm\varepsilon)^n$ se, por exemplo, $n=4$, a aproximação que você obterá no item **a** não é boa, com $n=4$, se $\varepsilon\geq1$. Provaremos isso apenas na Parte II-C desta série; por enquanto, você pode - se quiser - testar essa afirmação com o uso de um aplicativo como o Geogebra.

em torno de $x = 0$, a melhor possível? O que vimos até aqui, nesta subseção, nos leva a concluir, informalmente, que a função polinomial de grau $\leq n$ que melhor aproxima $f(x)$ em torno de $x = 0$ é a função $P_{\leq n}(x)$ que satisfaz as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} P_{\leq n}(0) &= f(0), \\ P'_{\leq n}(0) &= f'(0), \\ P''_{\leq n}(0) &= f''(0), \\ P'''_{\leq n}(0) &= f'''(0), \\ &\vdots \\ P^{(n)}_{\leq n}(0) &= f^{(n)}(0). \end{aligned} \tag{231}$$

Ou seja, trata-se da função polinomial $P_{\leq n}(x)$ de grau não superior a n que é igual a $f(x)$ para $x = 0$, e cujas n primeiras derivadas são iguais às derivadas correspondentes de $f(x)$, para $x = 0$.[101] A partir das $n+1$ igualdades acima, obtenha:

$$\boxed{f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,} \tag{232}$$

para x suficientemente próximo de 0.

Especificado o grau n do polinômio usado em (232), infelizmente não há como determinar, previamente, quão próximo de zero precisa estar x para termos uma boa aproximação; isso depende de qual é a função $f(x)$. Faremos uma análise interessante na Atividade 2-76, para $f(x) = \operatorname{sen} x$, e depois na Atividade 2-77 para $f(x) = \ln(1+x)$.

Atividade 2-76: a) Aplicando a aproximação (232) à função $f(x) = \operatorname{sen} x$, obtenha:

$$\boxed{\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{x^n}{n!} \quad (n \text{ ímpar}),} \tag{233}$$

para x suficientemente próximo de 0.

b) Usando um aplicativo como o Geogebra, trace o gráfico de $\operatorname{sen} x$ e, na mesma figura, trace sequencialmente os gráficos de $P_1(x) = x$, $P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$, $P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$, $P_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$, e assim por diante, até a função polinomial $P_{21}(x)$ (tenha um pouco de paciência). Observe como as aproximações vão ficando cada vez melhores.

c) Observe que $P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ aproxima relativamente bem $\operatorname{sen} x$ no intervalo $[0, \pi/2]$. Vamos testar essa aproximação para os ângulos notáveis 30°, 45° e 60°. Sabemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 30^{\circ} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} &= \frac{1}{2} = 0{,}5, \\ \operatorname{sen} 45^{\circ} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707106781, \\ \operatorname{sen} 60^{\circ} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866025404. \end{aligned}$$

Calcule $P_5(x)$ para $x = \pi/6$, $x = \pi/4$ e $x = \pi/3$, e compare com os resultados acima. É de se esperar que a aproximação seja melhor para valores de x mais próximos de 0. Assim, observe se

[101] O resultado do item **b** explica por que só consideramos, em (231), as n primeiras derivadas de $P_{\leq n}(x)$.

a aproximação para $\text{sen}(\pi/6)$ é melhor que a aproximação para $\text{sen}(\pi/4)$, e, esta, melhor que a aproximação para $\text{sen}(\pi/3)$.

d) Agora, vejamos se a inclusão de mais termos no polinômio usado para aproximar $\text{sen}\,x$ melhora a aproximação para um valor específico de x. Vamos escolher $x = \pi/3$. Calcule: $P_7(\pi/3)$, $P_9(\pi/3)$, $P_{11}(\pi/3)$ e $P_{13}(\pi/3)$, comparando os resultados obtidos com $\sqrt{3}/2 \approx 0{,}866025404$.

e) Verifique que $P_{13}(\pi/2)$ fornece, com aproximação de 9 casas decimais, 1,000000001, enquanto $P_{15}(\pi/2)$ fornece, com aproximação de 9 casas decimais, 1,000000000. Considerando o que aprendemos até aqui, com a realização desta atividade, podemos concluir que a função polinomial $P_{15}(x)$, que possui 8 termos, é suficiente para o cálculo de $\text{sen}\,x$, com aproximação de 9 casas decimais - desde que ela seja usada para x no intervalo $[0,\pi/2]$ (ou - podemos estender - para x no intervalo $[-\pi/2,\pi/2]$, já que as funções polinomiais $P_n(x)$ acima, com n ímpar, são - como $\text{sen}\,x$ - funções ímpares; ou seja, $P_n(-x) = -P_n(x)$).

f) Perceba que o cálculo de $\text{sen}\,x$, com x no intervalo $[0,\pi/2]$, é suficiente para o cálculo de $\text{sen}\,x$ para qualquer x real. Discuta com seus colegas a respeito. (Dica: observe o gráfico de $\text{sen}\,x$.) Se você sabe programar em alguma linguagem computacional, um ótimo exercício é criar sua própria função seno, a partir do que vimos nesta atividade. Faremos isso na Parte III desta série.

Atividade 2-77: a) Fazendo uso da aproximação (232), obtenha:

$$\boxed{\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{x^n}{n!} \quad (n \text{ par}),} \tag{234}$$

$$\boxed{e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!},} \tag{235}$$

$$\boxed{\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},} \tag{236}$$

para x suficientemente próximo de 0 (observando que no membro esquerdo de (236) devemos ter $x > -1$).

b) Usando um aplicativo como o Geogebra, trace o gráfico de $\ln(1+x)$ e, na mesma figura, trace sequencialmente os gráficos de (veja (236)) $P_1(x) = x$, $P_2(x) = x - \frac{x^2}{2}$, $P_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$, $P_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$, e assim por diante, até a função polinomial $P_{10}(x)$ (novamente, tenha um pouco de paciência), comparando-os sempre com o gráfico de $\ln(1+x)$. Observe como as aproximações perdem qualidade à medida que nos distanciamos do ponto $x = 0$. *Na Parte II-C desta série mostraremos que a aproximação (236) só é válida com $-1 < x \leq 1$, e desde que haja um número suficientemente grande de termos no membro direito de (236).* Mesmo assim, para que a aproximação seja boa para x muito próximo de 1 ou de -1, é necessário haver um número elevado de termos no segundo membro de (236); talvez elevado demais, como veremos ao final desta atividade.

c) Use a função polinomial $P_{10}(x)$ para obter uma aproximação para $\ln 2$. Faça isso de duas formas: primeiro, observando que $\ln 2 = \ln(1+x)$, com $x = 1$; depois, observando que (trata-se de uma pequena sacada) $\ln 2 = \ln\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(1+x)$, com $x = -\frac{1}{2}$. É de se esperar, comparando-se o gráfico de $P_{10}(x)$ com o gráfico de $\ln(1+x)$, que esta segunda forma forneça um melhor resultado. Veja se você confirma isso (comparando com o que fornece uma calculadora para $\ln 2$).

d) Com a sacada apresentada no item anterior, em princípio podemos usar a aproximação (236) - que só é válida com $-1 < x \leq 1$ - para obter uma aproximação para o logaritmo de qualquer número positivo. Vamos exemplificar obtendo uma aproximação para $\ln(375)$. Usando *notação científica*, podemos reescrever: $375 = 3{,}75 \times 10^2$. Segue que

$$\ln(375) = \ln(3{,}75 \times 10^2) = \ln(3{,}75) + 2\ln(10). \tag{237}$$

Logo, precisamos obter uma aproximação para $\ln(3{,}75)$ e uma aproximação para $\ln(10)$. (Perceba que, com a estratégia de reescrevermos em notação científica o número cujo logaritmo natural queremos calcular, de forma aproximada, basta conseguirmos obter uma boa aproximação para o logaritmo natural de um número no intervalo $(1,10]$. Veremos, ainda nesta atividade, por que isso é uma vantagem.) Usando a aproximação (236), e denotando seu membro direito por $P_n(x)$ - e assim temos $\ln(1+x) \approx P_n(x)$ -, obtemos:

$$\ln(3{,}75) = \ln\left(\frac{1}{3{,}75}\right)^{-1} = -\ln\left(\frac{1}{3{,}75}\right) = -\ln\left[1+\left(\frac{1}{3{,}75}-1\right)\right] \approx -P_n\left(\frac{1}{3{,}75}-1\right) \tag{238}$$

e

$$\begin{aligned}\ln(10) = \ln\left(\frac{1}{10}\right)^{-1} = -\ln\left(\frac{1}{10}\right) = -\ln\left[1+\left(\frac{1}{10}-1\right)\right] &\approx -P_n\left(\frac{1}{10}-1\right) \\ &= -P_n\left(-\frac{9}{10}\right),\end{aligned} \tag{239}$$

com n suficientemente grande. Substituindo (238) e (239) em (237), obtemos:

$$\ln(375) \approx -P_n\left(\frac{1}{3{,}75}-1\right) - 2\,P_n\left(-\frac{9}{10}\right). \tag{240}$$

Verificamos, usando o Geogebra, que infelizmente a aproximação (240) para $\ln(375)$ vai melhorando muito lentamente à medida que vamos aumentando o valor de n. Verifique você mesmo, aumentando o valor de n de unidade em unidade, que a aproximação (240) para $\ln(375)$ está correta, ao menos até a primeira casa decimal (considerando um possível arredondamento), pela primeira vez com $n = 21$. (Dica: use uma calculadora para o cálculo de $\ln(375)$, e, para o cálculo de $-P_n\left(\frac{1}{3{,}75}-1\right) - 2\,P_n\left(-\frac{9}{10}\right)$, faça uso de recursos de um aplicativo como o Geogebra.)

e) Fazendo uma *mudança de base*, obtenha uma aproximação para $\log_{10}(375)$.

f) Seja $A \times 10^{\alpha}$ a notação científica para um determinado número positivo a. Mostre que a aproximação (240) - para $a = 375$ - pode ser generalizada para

$$\ln(a) \approx -P_n\left(\frac{1}{A}-1\right) - \alpha\,P_n\left(-\frac{9}{10}\right), \tag{241}$$

com

$$P_n(x) \equiv x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \tag{242}$$

e n suficientemente grande. (Temos aqui a possibilidade de um ótimo exercício em uma linguagem de programação: a criação de uma função para o cálculo de logaritmos, a partir de (241) e (242). Faremos isso na Parte III desta série.)

Um comentário final:

Você pode questionar a vantagem do uso da notação científica, no desenvolvimento acima, afirmando que podemos obter uma aproximação para $\ln(375)$ da seguinte forma, mais direta:

$$\ln(375) = \ln\left(\frac{1}{375}\right)^{-1} = -\ln\left(\frac{1}{375}\right) = -\ln\left[1+\left(\frac{1}{375}-1\right)\right] \approx -P_n\left(\frac{1}{375}-1\right). \tag{243}$$

Bem, de fato, este último desenvolvimento é mais direto. Contudo, o argumento de $P_n(x)$, em $P_n\left(\frac{1}{375}-1\right)$, está muito próximo de -1, e a qualidade da aproximação em (236) vai piorando quando x vai se aproximando de -1 (ou de 1). Em (238), o argumento de $P_n(x)$ está mais distante de -1. Criamos um pequeno programa em linguagem C (que você aprenderá a criar na Parte III desta série, se já não souber), e verificamos que com o uso de (240) obtemos o valor correto para $\ln(375)$ fornecido por uma calculadora eletrônica, com aproximação de 9 casas decimais - que é 5,926926026 -, a partir de $n = 182$. Trata-se de um número elevado de termos, sem dúvida, mas (243) fornece, com $n = 182$, o valor aproximado 5,351469789 - que não está correto nem mesmo até a primeira casa decimal!

Atividade 2-78: Volte à Atividade 2-68 - particularmente à aproximação (217) e às suas formas alternativas em (218), (219) e (220). Dissemos, lá, que todas aquelas quatro expressões trazem a mesma ideia básica, que, se bem compreendida, nos leva a escrever diretamente qualquer uma delas, conforme a conveniência do momento. De modo similar, há formas alternativas para a aproximação (232). Será suficiente analisarmos uma delas:

$$\boxed{f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,} \tag{244}$$

para x suficientemente próximo de x_0.[102,103] Sua tarefa, nesta atividade, é passar da aproximação (232) para a aproximação (244) de um modo formal. Iremos guiá-lo, ou guiá-la (mostrando um caminho, entre vários possíveis).

a) Em primeiro lugar, troque "f" por "g", e "x" por "$\tilde{x}$", na aproximação (232), obtendo:

$$g(\tilde{x}) \approx g(0) + g'(0)\tilde{x} + \frac{g''(0)}{2!}\tilde{x}^2 + \cdots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}\tilde{x}^n,$$

para $\tilde{x}$ suficientemente próximo de 0. Não estamos cometendo nenhum pecado usando "g" no lugar de "f", e "$\tilde{x}$" no lugar de "x", concorda? Trata-se apenas de uma "mudança de nomes", por assim dizer. Achar isso estranho é como achar, por exemplo, que as funções $f(x) = x^2$ e $g(\tilde{x}) = \tilde{x}^2$ são duas funções distintas, entende?

b) Agora, reescreva $\tilde{x}$ como $x - x_0$. Isso significa fazer uma mudança de variável: de $\tilde{x}$ para $x = \tilde{x} + x_0$.

c) Por fim, defina $f(x) \equiv g(x - x_0)$ (e este "f" não tem nada a ver com o "f" inicial, em (232)), e obtenha a aproximação (244). Perceba que como a função $g(\tilde{x})$ está, supostamente, definida para $\tilde{x} = 0$ e para $\tilde{x}$ em torno de 0, então a função $f(x) \equiv g(x - x_0) = g(\tilde{x})$ está definida para $x = x_0$ e para x em torno de x_0.

Um comentário importante, antes de passarmos à próxima atividade. Podemos escrever, intuitivamente, a aproximação (244) a partir da aproximação (232) de uma forma bem direta (e que reforça a ideia de que nenhuma delas é realmente superior à outra, como posto na nota de rodapé 102 - embora a aproximação (244) já esteja pronta para uso com um x_0 qualquer). A ideia é que o zero, aqui, não desempenha nenhum papel particularmente importante, e, portanto, podemos passar, em (232), de 0 para um x_0 qualquer (desde que a função esteja definida para $x = x_0$ e em torno de x_0, é claro). Mas aí precisamos trocar, no membro direito de (232), x por

[102] À primeira vista, a aproximação (244) parece ser mais geral que a aproximação (232), pois fazendo $x_0 = 0$ em (244) obtemos (232). Mas você verá, realizando esta atividade, uma forma de passarmos de (232) a (244). Podemos então concluir que cada uma destas duas aproximações é uma forma alternativa à outra; nenhuma é realmente superior à outra.

[103] Observe que a aproximação (220) é um caso particular da aproximação (232) (para $n = 1$), e que a aproximação (219) é um caso particular da aproximação (244) (também para $n = 1$).

$x - x_0$, *para que continue, nas potências do membro direito, a distância entre o ponto para o qual conhecemos o valor da função* (e os valores de suas derivadas) *e o ponto para o qual queremos obter um valor aproximado para a função*.

Essa é a ideia básica que nos permite obter facilmente até outras formas para essas aproximações de ordem n. Por exemplo, fica fácil nos convencermos de que podemos escrever:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}(\Delta x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\Delta x)^n, \tag{245}$$

para Δx suficientemente pequeno.[104]

Atividade 2-79: a) Na Atividade 2-67 dissemos que ao final do desenvolvimento do *paramagneto de spin* $1/2$ - um modelo muito simples para determinados sólidos paramagnéticos - obtemos a expressão em (216) para a magnetização M. Verifique se para *campos de baixa intensidade* e *altas temperaturas* esse modelo prevê a chamada *lei de Curie* - uma lei experimental descoberta pelo físico francês Pierre Curie no final do séc. XIX. Basicamente, a lei de Curie afirma que para campos magnéticos externos B_{ext} de intensidade suficientemente baixa e temperaturas absolutas T suficientemente altas, a magnetização M de um meio paramagnético é proporcional a B_{ext} e inversamente proporcional a T - ou seja, nessas condições podemos escrever:

$$M = C\,\frac{B_{\text{ext}}}{T}, \tag{246}$$

em que C é uma constante de proporcionalidade. Como se trata de um resultado experimental, um bom modelo teórico para um meio paramagnético (e o paramagneto de spin $1/2$ não é o único - pesquise a respeito) deve ser capaz de prevê-lo, nas condições em que esse resultado é observado (baixos campos e altas temperaturas).

b) Para dar um significado mais preciso à ideia de "campos magnéticos externos B_{ext} de intensidade suficientemente baixa e temperaturas absolutas T suficientemente altas", no contexto do paramagneto de spin $1/2$, calcule para que razão $\mu_B B_{\text{ext}}/kT$ a aproximação linear para M obtida no item **a** difere em apenas 1 % (em módulo) do valor de M calculado com a igualdade (216). Não é possível chegar à resposta sem o uso de algum recurso computacional. Sugerimos que você explore o recurso da identificação de pontos de intersecção entre gráficos, usando um aplicativo como o Geogebra.

Estamos caminhando para o final desta subseção. Falta apenas uma atividade: a Atividade 2-80, na qual analisaremos o lançamento oblíquo de uma partícula sujeita a um arrasto linear. Mas, antes dela, anteciparemos dois resultados da seção "*séries infinitas*", da Parte II-C desta sequência de textos, porque eles serão usados em tal atividade. Para começar, convém que você revise o que dissemos sobre séries infinitas na seção 1 - Introdução -, em referência à Parte II-C.

Fez isso? Muito bem, o primeiro resultado que resolvemos antecipar (que só será provado na Parte II-C) é este:

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.} \tag{247}$$

Compare-o com a aproximação (235) para e^x. Observe que temos, em (247), uma igualdade, não uma aproximação! E observe a afirmativa de que tal igualdade é válida para todo x real!

[104] Observe que a aproximação (217) é um caso particular da aproximação (245) (para $n = 1$).

O que isso significa? Significa que *para qualquer número real x, e^x é igual ao limite da soma no membro direito de (247), quando o número de termos tende a infinito*. Esse limite está subentendido pelas reticências em (247), mas podemos torná-lo mais explícito reescrevendo:

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Trata-se de um resultado muito forte! Perceba que, com a notação de somatório (ou "notação sigma"), a aproximação (235) pode ser reescrita como

$$e^x \approx \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!},$$

para x suficientemente próximo de 0. Logo, a igualdade (247) nos diz que a aproximação (235) "tende à exatidão" quando o número de termos tende a infinito, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

Com a discussão acima, fica mais fácil entender o segundo resultado que resolvemos antecipar (que também só será provado na Parte II-C):

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \quad \text{para} \quad -1 < x \leq 1.} \tag{248}$$

Compare-o com a aproximação (236) para $\ln(1+x)$. O que chama a atenção em (248), em comparação com (247), é que enquanto em (247) a igualdade é válida para todo x real, em (248) a igualdade só é válida para $-1 < x \leq 1$. Isso não é óbvio, *a priori*. Por um lado, precisamos ter, em $\ln(1+x)$, $1+x > 0$, e isso nos leva a $x > -1$ em (248); mas não temos problema com $\ln(1+x)$ para $x > 1$ - e por isso a condição $x \leq 1$ (junto com $x > -1$) para a *convergência* da série em (248) precisa ser provada com cuidado (e o faremos na Parte II-C).

Dizemos que a série no segundo membro de (247) *converge* (para e^x) com qualquer x real, enquanto a série no segundo membro de (248) *converge* (para $\ln(1+x)$) com $-1 < x \leq 1$ e *diverge* com $x \leq -1$ ou $x > 1$.

Como dissemos, faremos uso das igualdades (247) e (248) na Atividade 2-80.

Atividade 2-80: Nesta atividade analisaremos, teoricamente, um *lançamento oblíquo* de uma partícula sujeita a um arrasto linear. Estaremos interessados, particularmente, na obtenção da equação da trajetória da partícula e na realização de um cálculo aproximado de seu alcance horizontal. Adicionalmente, realizaremos um cálculo exato da altura máxima da partícula, ao longo de sua trajetória. Enquanto este cálculo é possível, de forma exata, apenas com o uso de funções elementares, não é possível realizar um cálculo exato do alcance horizontal apenas com o uso de funções elementares. Ao final da Parte II-C desta série veremos como calcular exatamente o alcance horizontal de uma partícula sujeita a um arrasto linear fazendo uso de uma função não elementar denominada *função W de Lambert*.

a) Realizando a Atividade 2-48 você obteve a posição x, em função do tempo t, de uma partícula de massa m movendo-se ao longo do eixo x sob a ação de uma única força (com a direção do eixo x): um arrasto linear com componente x dada por $f_x = -bv_x$, sendo b uma constante positiva e v_x a componente x da velocidade da partícula. O resultado pode ser expresso da seguinte forma:

$$x(t) = x_0 + \frac{mv_{x0}}{b}\left(1 - e^{-bt/m}\right), \tag{249}$$

em que $x_0 \equiv x(0)$ e $v_{x0} \equiv v_x(0)$. Depois, realizando a Atividade 2-51, você obteve a posição y, em função do tempo t, de uma partícula de massa m movendo-se ao longo do eixo vertical y sob a ação de seu próprio peso e de um arrasto linear vertical com componente y dada por $f_y = -bv_y$, sendo b uma constante positiva e v_y a componente y da velocidade da partícula. O resultado pode ser expresso da seguinte forma:

$$y(t) = y_0 + \frac{m}{b}\left(v_{y_0} + \frac{mg}{b}\right)\left(1 - e^{-bt/m}\right) - \frac{mg}{b}t, \tag{250}$$

em que $y_0 \equiv y(0)$, $v_{y_0} \equiv v_y(0)$ e g é o módulo da aceleração da gravidade local. Aqui, vamos considerar um *lançamento oblíquo* dessa partícula, sujeita a um arrasto linear, e *analisar se as funções $x(t)$ e $y(t)$, acima, permanecem válidas - agora para as componentes x e y, respectivamente, da posição da partícula*. Estamos supondo que você sabe trabalhar minimamente com vetores em coordenadas cartesianas (ao nível da física do primeiro ano do ensino médio). Muito bem, a Fig. 20 ilustra uma partícula de massa m sendo lançada, no instante $t = 0$, com velocidade $\mathbf{v}_0$, da posição inicial determinada pelo par ordenado (x_0, y_0). A força resultante $\mathbf{F}_{\text{res}}$ sobre a partícula é a soma de seu peso $m\mathbf{g}$ e do arrasto linear $\mathbf{f} = -b\mathbf{v}$, sendo b uma constante positiva e $\mathbf{v}$ a velocidade da partícula no instante t considerado. Aplicando a segunda lei de Newton, $\mathbf{F}_{\text{res}} = m\mathbf{a}$, a essa partícula, obtenha as seguintes equações diferenciais (observando que $\mathbf{a}$ - a aceleração da partícula - é um vetor cuja componente x é $a_x = \mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t$, e cuja componente y é $a_y = \mathrm{d}v_y/\mathrm{d}t$, sendo v_x e v_y respectivamente as componentes x e y da velocidade $\mathbf{v}$ da partícula no instante t considerado):

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -\frac{b}{m}v_x \tag{251}$$

e

$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -\frac{b}{m}v_y - g. \tag{252}$$

Como estas duas equações diferencias são as mesmas que foram obtidas na Atividade 2-39 (e repetida na Atividade 2-48) e na Atividade 2-51, respectivamente, suas soluções - $v_x(t)$ e $v_y(t)$ - são as mesmas que foram lá obtidas. E, consequentemente, as funções $x(t)$ e $y(t)$ que resultam das integrações de $v_x(t)$ e $v_y(t)$ - as funções em (249) e (250) - nos dão, juntas, a posição da partícula lançada obliquamente sob a ação de seu peso e de um arrasto linear.[105]

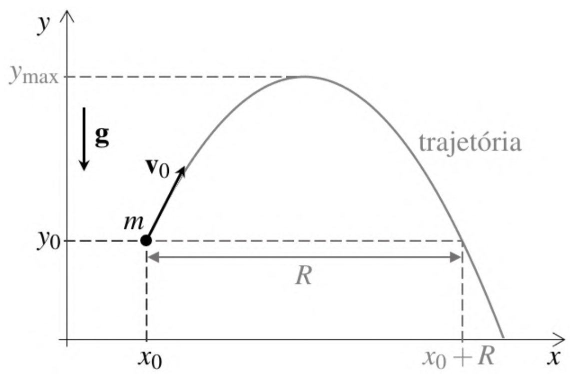


Figura 20: Atividade 2-80.

b) Um teste razoável para os resultados (249) e (250) é analisar se, na ausência de arrasto, obtemos estas funções, conhecidas desde o ensino médio (supomos):

$$x(t) = x_0 + v_{x_0}t \tag{253}$$

[105] Um pequeno detalhe: talvez você considere mais adequado, no caso de um lançamento oblíquo, reescrevermos, em (249) e (250), v_{x_0} e v_{y_0} como v_{0_x} e v_{0_y}, respectivamente. Discuta com seus colegas.

e

$$y(t) = y_0 + v_{y_0} t - \frac{1}{2} g t^2, \tag{254}$$

respectivamente. Mas observe que não podemos simplesmente fazer $b = 0$ em (249) e (250). No desenvolvimento que nos levou àquelas igualdades, obtivemos expressões com b em um denominador, e isso agora nos proíbe de fazer $b = 0$. Uma forma de contornar essa dificuldade (mas não é a única, como veremos na Parte II-B), é substituir a exponencial em (249) e (250) por uma série, usando a igualdade (247). Faça isso, e em seguida faça b tender a 0, para obter (253) e (254).

c) A partir das igualdades (253) e (254) obtenha a equação da *trajetória* da partícula na ausência de arrasto:

$$y = y_0 + \frac{v_{y_0}}{v_{x_0}}(x - x_0) - \frac{g}{2v_{x_0}^2}(x - x_0)^2. \tag{255}$$

Como y é uma função polinomial do segundo grau de x, a trajetória é uma *parábola*.[106]

d) A partir das igualdades (249) e (250) obtenha a equação da trajetória da partícula sujeita a um arrasto linear.

e) Verifique se na ausência de arrasto obtemos, a partir da equação encontrada no item **d**, a equação (255). Faça uso da série em (248). (Esteja certo, ou certa, de que a série que você obterá converge.)

f) Usando um aplicativo como o Geogebra, trace, a partir da equação (255), a trajetória de uma partícula de massa $m = 0{,}1\,\text{kg}$, lançada no vácuo, com $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $v_{x_0} = v_{y_0} = 10\,\text{m/s}$ e $g = 9{,}8\,\text{m/s}^2$. Em seguida, trace, na mesma figura, a trajetória da mesma partícula, lançada do mesmo modo, mas agora sujeita a um arrasto linear, com $b = 0{,}01\,\text{kg/s}$. Faça uso da equação encontrada no item **d**. Na sequência, trace uma terceira trajetória: modificando, apenas, o valor de b para $0{,}1\,\text{kg/s}$. Por fim, trace uma quarta trajetória: com $b = 1\,\text{kg/s}$. Usando recursos do aplicativo, em cada um dos quatro casos identifique, e anote, o alcance horizontal R e a altura máxima y_{max} (veja a Fig. 20). Faremos uso disso mais adiante.

g) Como uma extensão do item anterior, usando recursos do aplicativo você pode produzir uma animação interessante (sem se desfazer das figuras geradas no item **f**) fazendo b variar de $0{,}0001\,\text{kg/s}$ a $1\,\text{kg/s}$ (entendendo que para cada valor de b temos uma trajetória distinta).

h) A trajetória traçada no item **f** para o caso em que $b = 1\,\text{kg/s}$ parece sugerir que há uma *assíntota vertical* à sua direita, não acha?[107] Seria a assíntota de equação $x = 1\,\text{m}$? E se há uma assíntota vertical no caso em que $b = 1\,\text{kg/s}$, há também assíntotas verticais nos casos em que $b = 0{,}1\,\text{kg/s}$ e $b = 0{,}01\,\text{kg/s}$? Se sim, quais são elas? Sua tarefa, neste item, é buscar, analiticamente (ou seja, sem usar recursos do aplicativo, mas realizando cálculos analíticos), respostas para essas questões. Sugerimos você investigar a existência de uma assíntota vertical, na trajetória da partícula lançada obliquamente e sujeita a um arrasto linear, de duas formas: primeiro, calculando o limite de $x(t)$, quando $t \to \infty$; depois, analisando a própria equação da trajetória. Se essa assíntota vertical existir, trace-a, para os casos $b = 1\,\text{kg/s}$, $b = 0{,}1\,\text{kg/s}$ e

[106] Na Parte IV desta série definiremos *parábola* geometricamente, e então mostraremos por que o gráfico de uma função polinomial do segundo grau é uma parábola.

[107] Apenas na Parte II-B desta série haverá uma subseção específica para o estudo de assíntotas. Contudo, já exploramos assíntotas aqui nesta Parte II-A. Vimos que as curvas que constituem o gráfico de $\operatorname{tg} x$ não interceptam as linhas verticais tracejadas na Fig. 5, mas se aproximam cada vez mais delas, sem restrição. Tais linhas são denominadas assíntotas (verticais). De um modo geral, *uma assíntota é uma linha reta* (vertical, horizontal ou oblíqua) *da qual se aproxima cada vez mais, sem restrição, o gráfico de uma função, sem jamais interceptá-la*. É exatamente essa ideia que precisamos compreender bem, aqui nesta atividade. Se há uma assíntota vertical à direita (ou à esquerda, se $v_{x_0} < 0$) da trajetória da partícula, tal partícula jamais atinge essa linha, mas se aproxima cada vez mais dela, sem restrição. Vimos um exemplo de assíntotas horizontais na Atividade 2-59.

$b = 0{,}01\,\mathrm{kg/s}$, junto com as trajetórias correspondentes, usando o mesmo aplicativo.
i) Pode-se dizer que conseguimos resolver completamente o problema do movimento de uma partícula lançada obliquamente, na presença de um campo gravitacional uniforme, e sujeita a um arrasto linear. Afinal, obtivemos as funções $x(t)$ e $y(t)$, e também, adicionalmente, a equação da trajetória. Contudo, isso não necessariamente significa que é possível calcular, de forma exata e apenas com o uso de funções elementares (veja a subseção 2.2.1), todas as quantidades de interesse relativas a esse problema. Uma dessas quantidades é o alcance horizontal da partícula: a distância R ilustrada na Fig. 20. Vamos começar revisando o cálculo do alcance horizontal no caso em que $b = 0$ (exploraremos o cálculo do alcance horizontal no caso em que $b \neq 0$ no próximo item). Primeiro, faça $y = y_0$ na igualdade (255), e resolva a equação resultante para x. Uma das soluções é $x = x_0$, e a outra é $x = x_0 + R$ (veja a Fig. 20). Encontre R. Feito isso, explore outra abordagem: faça $y = y_0$ na igualdade (254), e resolva a equação resultante para t. Uma das soluções é $t = 0$; vamos denotar a outra por $\tilde{t}$. Daí, substitua a expressão obtida para $\tilde{t}$ na igualdade (253), com $x = x_0 + R$ (veja a Fig. 20), e encontre R.
j) No item **d** você obteve a equação da trajetória da partícula sujeita a um arrasto linear. Para calcular o alcance horizontal R dessa partícula, em princípio bastaria fazer $y = y_0$ na equação da trajetória e resolver a equação resultante para x - a saber (verifique):

$$\left(\frac{v_{y_0}}{v_{x_0}} + \frac{mg}{bv_{x_0}}\right)(x - x_0) + \frac{m^2 g}{b^2}\ln\left(1 - \frac{b(x - x_0)}{mv_{x_0}}\right) = 0.$$

Uma solução trivial para esta equação é $x = x_0$ (verifique). Mas a solução que nos interessa é $x = x_0 + R$ (veja a Fig. 20). Temos, então, a seguinte equação para R (basta trocar $x - x_0$ por R na equação anterior):

$$\left(\frac{v_{y_0}}{v_{x_0}} + \frac{mg}{bv_{x_0}}\right)R + \frac{m^2 g}{b^2}\ln\left(1 - \frac{bR}{mv_{x_0}}\right) = 0. \tag{256}$$

Um pequeno detalhe técnico: na Fig. 20 temos v_{x_0} e v_{y_0} ambos positivos, mas podemos ter também um deles negativo, ou ambos negativos. Perceba que com v_{y_0} negativo não temos um alcance horizontal. E mantendo v_{y_0} positivo e fazendo v_{x_0} negativo, estamos apenas lançando a partícula obliquamente para cima e para a esquerda, em vez de para cima e para a direita, e isso não mudaria o alcance R (só teríamos que trocar, na Fig. 20, $x_0 + R$ por $x_0 - R$). Então vamos considerar, na equação acima, v_{x_0} e v_{y_0} ambos positivos.
Muito bem, continuando, desejamos resolver a equação (256) para R. Mas, infelizmente, isso é impossível, só com o uso de funções elementares. Se duvida, tente. Então o que podemos fazer - analiticamente, e com o uso de funções elementares, apenas - é buscar uma *solução aproximada* (algo muito comum, na física), considerando que o arrasto é suficientemente pequeno para que o alcance R seja apenas ligeiramente menor que o alcance correspondente quando a partícula é lançada no vácuo. Você calculou esse alcance no item **i**, e iremos denotá-lo aqui por R_{vac}. Você obteve: $R_{\text{vac}} = 2v_{x_0}v_{y_0}/g$. Então - repetindo - *estamos em busca de uma solução aproximada para a equação (256), considerando que o arrasto é suficientemente pequeno para que R seja apenas ligeiramente menor que* $R_{vac} \equiv 2v_{x_0}v_{y_0}/g$. O desenvolvimento que você verá a seguir carece de rigor matemático - é bom que fique claro. Mas esse tipo de desenvolvimento tem seu lugar na física - em parte como uma possível primeira forma de ataque a um problema que exige um cálculo aproximado. Nesta opção, em uma segunda investida (que não faremos aqui) o rigor seria buscado. Então vamos lá. É fisicamente razoável (veja se você concorda) considerar que temos um *arrasto pequeno* - no sentido de que o alcance horizontal será apenas ligeiramente menor que R_{vac} - se o módulo do arrasto inicial, bv_0 (sendo $v_0 = \sqrt{v_{x_0}^2 + v_{y_0}^2}$), é muito menor que

o módulo mg do peso da partícula. Isso nos leva à condição

$$v_0 = \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2} \ll v_{\text{ter}} = mg/b,$$

lembrando que v_{ter} é a velocidade terminal da partícula. No entanto, tornamos a condição de arrasto pequeno mais simples substituindo esta última condição por estas duas:

$$0 < v_{x0} \ll v_{\text{ter}} = mg/b \quad \text{e} \quad 0 < v_{y0} \ll v_{\text{ter}} = mg/b,$$

ou, equivalentemente,

$$0 < \frac{bv_{x0}}{mg} \ll 1 \quad \text{e} \quad 0 < \frac{bv_{y0}}{mg} \ll 1. \tag{257}$$

Perceba que estas duas condições, juntas, garantem que $v_0 = \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2} \ll v_{\text{ter}} = mg/b$. (Pense em um triângulo retângulo: se os dois catetos são muito pequenos, a hipotenusa é, necessariamente, muito pequena.) Estamos supondo que as condições em (257), *juntas*, são suficientes para garantir que R é apenas ligeiramente menor que $R_{\text{vac}} = 2v_{x0}v_{y0}/g$, e é nesse sentido que estamos chamando-as de "condições de arrasto pequeno". Lembre-se: não se trata de uma prova matemática; estamos sendo guiados por nossa intuição física. E sendo R ligeiramente menor que $2v_{x0}v_{y0}/g$,

$$\frac{bR}{mv_{x0}} \ \text{é ligeiramente menor que} \ \frac{b}{m\cancel{v_{x0}}}\frac{2\cancel{v_{x0}}v_{y0}}{g} \left(= \frac{2bv_{y0}}{mg}\right),$$

em termos relativos, e a segunda condição em (257) nos leva, portanto, a concluir (se nossa intuição estiver correta) que

$$0 < \frac{bR}{mv_{x0}} \ll 1. \tag{258}$$

E por que este resultado é importante? Para que possamos usar, em (256), a aproximação (236), com algum valor adequado para n. Faça isso, e o que mais for necessário - considerando as condições de arrasto pequeno em (257) -, para obter a seguinte solução aproximada para a equação (256):

$$R \approx \overbrace{\frac{2v_{x0}v_{y0}}{g}}^{R_{\text{vac}}} \left(1 - \frac{4}{3}\frac{bv_{y0}}{mg}\right), \quad \text{se } 0 < \frac{bv_{y0}}{mg} \ll 1. \tag{259}$$

Alertamos que se trata de uma tarefa desafiadora. Não é que ela seja difícil; mas exigirá uma boa dose de paciência de sua parte. Poderíamos dar algumas dicas, mas isso diminuiria o desafio.[108]

k) No item **f**, fazendo uso de um aplicativo, você identificou, na trajetória de uma partícula lançada obliquamente, o alcance horizontal R. Fez isso para quatro casos: no primeiro, com a partícula lançada no vácuo, e nos outros três com a partícula sujeita a um arrasto linear. Compare os alcances identificados nos últimos três casos com o que obtemos com o uso da aproximação (259), e justifique, em cada caso, por que a aproximação (259) é boa ou ruim.

l) Calcule a altura máxima da partícula, y_{max}, ao longo de sua trajetória (veja a Fig. 20). (Trata-se de um cálculo exato, não de um cálculo aproximado.)

[108] No item **i** você calculou o alcance horizontal de uma partícula lançada obliquamente no vácuo de duas formas: primeiro, fazendo $y = y_0$ na equação da trajetória e daí resolvendo a equação resultante para x, e depois calculando o "tempo de voo" e daí substituindo-o na expressão para $x(t)$. Aqui no item **j**, contudo, pedimos a você para calcular o alcance horizontal de uma partícula sujeita a um arrasto linear apenas da primeira dessas duas formas possíveis. Achamos que seria exaustivo para você fazer os cálculos da segunda forma. Mas fizemos isso por você, e podemos lhe dizer que o resultado é o mesmo, com mais ou menos o mesmo nível de esforço.

m) Verifique se as alturas máximas identificadas nos três últimos casos do item **f** correspondem ao que fornece a expressão que você obteve no item **l**.
n) Mostre que a segunda das condições de arrasto pequeno em (257), aplicada à expressão que você obteve no item **l**, leva, em primeira aproximação, à altura máxima atingida pela partícula quando lançada no vácuo (como esperado).

2.4 Diferenciação implícita e taxas relacionadas

O conteúdo desta subseção está intimamente relacionado à *regra da cadeia*. Podemos pensar os tópicos *diferenciação implícita* e *taxas relacionadas* como aplicações da regra da cadeia. Há outros dois tópicos que têm nesta subseção um bom lugar para sua apresentação: os tópicos *diferenciação logarítmica* (que pode ser pensado como uma aplicação específica da técnica de diferenciação implícita) e *taxa de variação relativa* (que pode ser conectado à diferenciação logarítmica).

Funções implicitamente definidas; diferenciação implícita

Antes de introduzirmos o tópico *diferenciação implícita*, precisamos entender o que são *funções implicitamente definidas*.

Na maior parte do tempo, trabalhamos na física com funções *explicitamente* definidas. Um exemplo de função explicitamente definida:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x}, \end{aligned}$$

ou, simplesmente (como nós físicos, em geral, preferimos escrever),

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad \text{para } x \geq 0.$$

Se a variável y está relacionada à variável x através da função acima, dizemos que y é função de x, e podemos escrever, diretamente:

$$y(x) = \sqrt{x}, \quad \text{para } x \geq 0,$$

ou, ainda mais concisamente,

$$y = \sqrt{x}, \quad \text{para } x \geq 0. \tag{260}$$

Quando não especificamos o domínio de uma função real, fica subentendido que se trata do maior subconjunto possível de $\mathbb{R}$ para o qual não temos nenhum problema (em $\mathbb{R}$) com a expressão que define a função. Como $\sqrt{x}$ está bem definida, em $\mathbb{R}$, para qualquer número real x não negativo, podemos reescrever (260) simplesmente como

$$y = \sqrt{x}. \tag{261}$$

Muito bem, agora considere a igualdade

$$y^2 - x = 0. \tag{262}$$

Há uma infinidade de funções $y(x)$ que a satisfazem. As duas mais óbvias são

$$y = \sqrt{x} \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{x},$$

ou, mais abertamente,

$$y = \sqrt{x}, \ \text{para } x \geq 0 \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{x}, \ \text{para } x \geq 0. \tag{263}$$

Mas podemos restringir à vontade o domínio de qualquer uma destas duas funções, obtendo, assim, uma infinidade de outras funções. Por exemplo:

$$y = \sqrt{x}, \ \text{para } 0 \leq x \leq 1. \tag{264}$$

Então *a igualdade (262) define, implicitamente, uma infinidade de funções* $y(x)$. Qualquer função $y(x)$ que a satisfaça para todo x em seu domínio pertence ao conjunto das funções implicitamente definidas por tal igualdade. Procure entender bem isso.

Infelizmente, nem sempre podemos obter explicitamente, apenas com o uso de um número finito de funções elementares, as funções $y(x)$ implicitamente definidas a partir de uma igualdade relacionando y e x. É o caso, por exemplo, na igualdade

$$y e^y = x, \tag{265}$$

pois não conseguimos resolver esta equação para y.[109]

Vejamos agora como obter, a partir de igualdades como (262) e (265), que definem implicitamente famílias de funções $y(x)$, igualdades relacionando $y'(x)$ a $y(x)$ e/ou x. A ideia é simples: encarando cada membro da igualdade como uma função de x, temos algo como

$$g(x) = h(x);$$

daí, derivando ambos os membros, obtemos

$$g'(x) = h'(x).$$

O detalhe é que o cálculo de ao menos uma dessas derivadas envolve o uso da regra da cadeia - uma vez que y é uma função de x.

Vamos começar aplicando essa ideia à igualdade (262):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y^2 - x\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(0) \implies 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 1 = 0 \implies \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2y}. \tag{266}$$

Precisamos discutir dois pontos importantes neste desenvolvimento. Em primeiro lugar, entenda que, no desenvolvimento acima, y é uma das infinitas funções implicitamente definidas pela igualdade (262) (por enquanto, não precisamos especificar qual); portanto, só podemos aplicar a última igualdade no desenvolvimento em (266) para x no domínio de y. O outro ponto importante a ser observado é que a última igualdade, em (266), não nos fornece, explicitamente, $y'(x)$. Precisamos substituir, no segundo membro, a expressão para a função $y(x)$ escolhida. Felizmente, neste caso isso é possível. Escolhendo $y(x)$ como a primeira das duas funções em (263), obtemos:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \ \text{para } x > 0,$$

[109] Na Parte II-C veremos que há séries infinitas para funções $y(x)$ implicitamente definidas pela equação (265). Essas funções são muito importantes, e são genericamente denotadas por $W(x)$, e denominadas “funções W de Lambert”.

como esperado (pois sabemos que a derivada de $\sqrt{x}$ é $1/(2\sqrt{x})$).[110] Escolhendo $y(x)$ como a segunda das duas funções em (263), obtemos:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2(-\sqrt{x})} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ para } x > 0,$$

como esperado. E escolhendo $y(x)$ como a função em (264), obtemos:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ para } 0 < x < 1,$$

como esperado.[111] Mas nem sempre temos uma expressão para a função $y(x)$. É o que veremos a seguir.

Passemos à igualdade (265). Temos:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y\,e^y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) \implies \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}e^y + y\,e^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 \implies (1+y)\,e^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 \implies \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{(1+y)\,e^y} \implies$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{e^{-y}}{1+y}. \tag{267}$$

Vamos discutir este resultado. No desenvolvimento acima, y é uma das infinitas funções implicitamente definidas pela igualdade (265); portanto, só podemos aplicar a igualdade (267) para x no domínio da função $y(x)$ escolhida. O problema é que a equação (265) não pode ser resolvida para y, e, portanto, não temos uma expressão para $y(x)$ em termos de um número finito de funções elementares. Decorre disso que a igualdade (267) não pode nos fornecer, explicitamente, $y'(x)$. Mas isso não significa que essas derivadas não existem. Ao final da Parte II-C desta série veremos que as funções implicitamente definidas pela igualdade (265) são muito importantes, com aplicações à física. Elas são genericamente denotadas por $W(x)$, e denominadas "funções W de Lambert".[112] E suas derivadas existem. Deixaremos o estudo dessas funções para o final da Parte II-C desta série. Por ora, vamos adiantar apenas o seguinte: o gráfico de uma dessas funções, denotada por $W_0(x)$, passa pelo ponto $(0,0)$ do plano xy - e observe que a igualdade (265) está correta com $x=0$ e $y=0$ -, e, portanto, a igualdade (267) nos dá (com $W_0(x)$ no lugar de $y(x)$):

$$\frac{\mathrm{d}W_0(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{e^{-W_0(x)}}{1+W_0(x)} \implies \left.\frac{\mathrm{d}W_0(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \frac{e^{-W_0(0)}}{1+W_0(0)} = \frac{e^0}{1+0} = 1\,. \tag{268}$$

Ou seja, mesmo sem termos uma expressão para $W_0(x)$, conseguimos calcular sua derivada para $x=0$, sabendo que seu gráfico passa pelo ponto $(0,0)$. Uma aplicação disso é que, em primeira aproximação, temos

$$W_0(x) \approx x, \quad \text{para } |x| \ll 1.$$

[110] Perceba que a derivada de $y(x) = \sqrt{x}$ não está definida para $x=0$. Reflita a respeito em termos de retas tangentes ao gráfico desta função. Faremos esse tipo de discussão na Parte II-B desta série.

[111] Há, aqui, um pequeno detalhe técnico: a não inclusão do ponto $x=1$ no domínio da derivada de $y=\sqrt{x}$, para $0 \le x \le 1$. Como o gráfico da função se encerra, à direita, para $x=1$, não há ali uma reta tangente - a menos que tenhamos em mente uma *reta tangente à esquerda*. Discutiremos isso na Parte II-B desta série.

[112] Para os leitores avançados: o que estamos chamando aqui de "funções W de Lambert" (no plural) são *ramos reais* de uma única função complexa multivalorada $W(z)$, denominada "função W de Lambert" (no singular), definida implicitamente pela igualdade $W(z)e^{W(z)} = z$, com $z \in \mathbb{C}$. Esses ramos reais são dois (trabalhando com o maior domínio possível, em cada caso), e assim denotados: a função $W_0(x)$, para $x \ge -1/e$, e a função $W_{-1}(x)$, para $-1/e \le x < 0$. Quando citamos, neste texto, a função W de Lambert (no singular) e seu uso para o cálculo exato do alcance horizontal de uma partícula sujeita a um arrasto linear, estávamos nos referindo à função real $W_0(x)$. Pesquise a respeito, ou aguarde o estudo da Parte II-C desta série.

(O quão menor que 1 precisa ser o módulo de x para que esta aproximação seja boa, é algo a ser investigado apenas na Parte II-C desta série.)

Se a discussão acima lhe pareceu difícil, abstrata, não fique empacado ou empacada aqui; como dissemos, faremos um estudo detalhado das funções W de Lambert apenas ao final da Parte II-C desta série. O importante, neste momento, é você entender o *processo de diferenciação implícita* - ou seja, o *processo de obtenção de uma igualdade envolvendo a derivada de uma função implicitamente definida* - e perceber que nem sempre tal processo nos leva a uma expressão explícita para essa derivada. Realize as atividades a seguir, para amadurecer um pouco essas ideias.

Atividade 2-81: a) Considere a igualdade $y^3 - 2x = 1$. Mostre que ela define, implicitamente, uma família (infinita) de funções $y(x)$ que diferem entre si apenas quanto a seus domínios (que podemos restringir, à nossa escolha), mas não quanto à expressão para $y(x)$. Qual é o maior domínio, em $\mathbb{R}$, que $y(x)$ pode ter?
b) Calcule a derivada de $y(x)$ de duas formas: diretamente da expressão para $y(x)$ que você obteve no item **a**, e, em seguida, por diferenciação implícita da equação $y^3 - 2x = 1$. Para que valores de x essa derivada existe? (Observe que através da diferenciação implícita você não obterá, diretamente, uma expressão para $y'(x)$, mas uma igualdade relacionando $y'(x)$ a $y(x)$. Será necessário substituir, nessa igualdade, a expressão para $y(x)$ que você obteve no item **a**.)
c) Usando um aplicativo como o Geogebra, trace o gráfico da função $y(x)$ fazendo uso da expressão que você obteve no item **a**, considerando o maior domínio possível em $\mathbb{R}$. Em seguida, no mesmo aplicativo, trace a curva que corresponde à equação $y^3 - 2x = 1$ (dependendo do aplicativo, será suficiente escrever no mesmo esta equação e teclar Enter). Perceba que se trata da mesma curva, e que isso é consequência de só haver uma única solução da equação $y^3 - 2x = 1$ para $y(x)$ - a menos de possíveis restrições de domínio.

Atividade 2-82: Esta atividade é muito semelhante à Atividade 2-81. A diferença básica está na igualdade inicial, que aqui é $y^3 - x^2 = 1$.
a) Mostre que a igualdade $y^3 - x^2 = 1$ define, implicitamente, uma família (infinita) de funções $y(x)$ que diferem entre si apenas quanto a seus domínios (que podemos restringir, à nossa escolha), mas não quanto à expressão para $y(x)$. Qual é o maior domínio, em $\mathbb{R}$, que $y(x)$ pode ter?
b) Calcule a derivada de $y(x)$ de duas formas: diretamente da expressão para $y(x)$ que você obteve no item **a**, e, em seguida, por diferenciação implícita da equação $y^3 - x^2 = 1$. Para que valores de x essa derivada existe? (Observe que através da diferenciação implícita você não obterá, diretamente, uma expressão para $y'(x)$, mas uma igualdade relacionando $y'(x)$ a $y(x)$ e a x. Será necessário substituir, nessa igualdade, a expressão para $y(x)$ que você obteve no item **a**.)
c) Usando um aplicativo como o Geogebra, trace o gráfico da função $y(x)$ fazendo uso da expressão que você obteve no item **a**, considerando o maior domínio possível em $\mathbb{R}$. Em seguida, no mesmo aplicativo, trace a curva que corresponde à equação $y^3 - x^2 = 1$. Perceba que se trata da mesma curva, e que isso é consequência de só haver uma única solução da equação $y^3 - x^2 = 1$ para $y(x)$ - a menos de possíveis restrições de domínio.
d) Como uma tarefa adicional, trace, junto com o gráfico de $y(x)$, o gráfico de $y'(x)$. Observe suas simetrias, e que, para $x > 0$, $y'(x)$ possui um valor máximo. Calcule para que valor de x esse máximo ocorre.

Atividade 2-83: a) Mostre que a igualdade $y^2 - x^3 = 1$ define, implicitamente, uma família (infinita) de funções $y(x)$ que podem diferir entre si *não apenas* quanto a seus domínios (que podemos restringir, à nossa escolha), mas também quanto à expressão para $y(x)$. Qual é o maior

domínio, em $\mathbb{R}$, que $y(x)$ pode ter, em cada caso?
b) Calcule, para cada caso, a derivada de $y(x)$. Faça isso por diferenciação implícita da equação $y^2 - x^3 = 1$. Para que valores de x essas derivadas existem?
c) Usando um aplicativo como o Geogebra, trace os gráficos das duas funções $y(x)$ encontradas no item **a**, considerando, para cada uma delas, o maior domínio possível em $\mathbb{R}$. Em seguida, no mesmo aplicativo, trace a curva que corresponde à equação $y^2 - x^3 = 1$. Perceba que tal curva é a união desses dois gráficos.

Atividade 2-84: A Fig. 21, criada com o uso do Geogebra, exibe a curva de equação

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{x+y}, \tag{269}$$

que pode ser reescrita como (verifique)

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 1. \tag{270}$$

Entenda que cada par ordenado (x, y) que satisfaz esta equação corresponde a um ponto da curva, e cada ponto da curva corresponde a um par ordenado (x, y) que satisfaz esta equação.
a) Na Fig. 21 estão destacados três pontos dessa curva. Verifique que os pontos $\mathrm{A} = (0, 1)$ e $\mathrm{B} = (1, 0)$ satisfazem a equação (270).

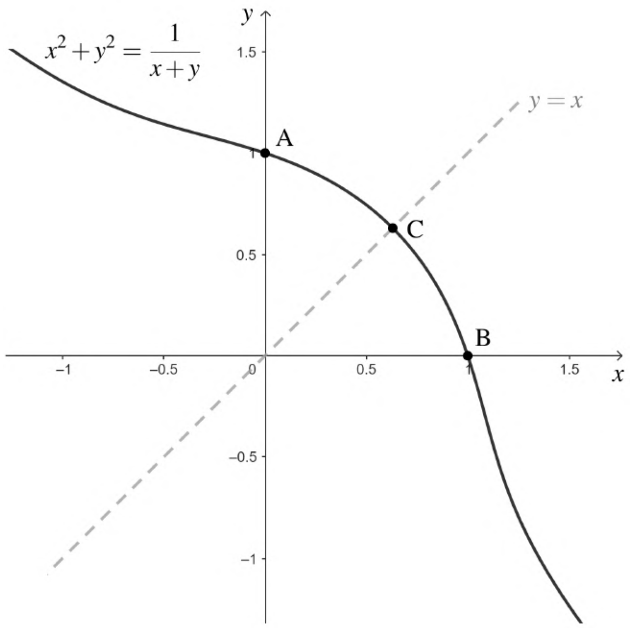


Figura 21: Atividade 2-84.

b) O ponto C, na Fig. 21, é o ponto de intersecção da curva com a bissetriz dos quadrantes ímpares: a reta de equação $y = x$. Perceba que a curva é simétrica em relação a essa bissetriz, e isso está diretamente relacionado ao fato de que a equação (269) (ou a equação (270)) se mantém a mesma ao permutarmos as variáveis x e y (pense um pouco a respeito disso). Podemos dizer, de forma um pouco mais elegante (ou mais pomposa), que a equação (269) (ou a equação (270)) é *invariante* sob permutação das variáveis x e y. Encontre as coordenadas do ponto C.
c) Obtenha, sem calcular nenhuma derivada (apenas explorando a simetria do problema), a equação da reta tangente à curva da Fig. 21 no ponto C. Verifique, fazendo uso de um aplicativo

como o Geogebra, se a equação que você obteve está correta.
d) Agora, através de diferenciação implícita da equação (270), obtenha as equações das retas tangentes à curva da Fig. 21 nos pontos A e B. Em seguida, verifique, fazendo uso de um aplicativo como o Geogebra, se as equações que você obteve estão corretas.
e) Os pontos A e B estão em posições simétricas em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares (e, como vimos, a curva é simétrica em relação a essa bissetriz). Observe, a partir das equações das retas tangentes à curva nos pontos A e B, obtidas no item **d**, que os coeficientes angulares dessas retas são, um, o inverso multiplicativo do outro. Convença-se, geometricamente, de que não se trata de uma coincidência, mas de uma propriedade geral - a saber:

> Se uma curva é simétrica em relação à reta de equação $y = x$, e se A e B são dois pontos dessa curva em posições simétricas em relação à reta de equação $y = x$, então os coeficientes angulares α e β das retas tangentes a esse curva nos pontos A e B, respectivamente, são o inverso multiplicativo um do outro:
>
> $$\alpha = \frac{1}{\beta}, \tag{271}$$
>
> contanto que nenhuma dessas retas seja vertical. Se uma das retas é vertical, a outra é horizontal.

No caso particular em que a curva é o gráfico de uma função $f(x)$, podemos concluir:

> Se o gráfico de uma função $f(x)$ é simétrico em relação à reta de equação $y = x$, e se A e B são dois pontos desse gráfico em posições simétricas em relação à reta de equação $y = x$, então
>
> $$f'(x_\mathrm{A}) = \frac{1}{f'(x_\mathrm{B})}, \tag{272}$$
>
> contanto que $f'(x_\mathrm{A})$ e $f'(x_\mathrm{B})$ sejam ambos não nulos.

(Talvez você queira, como uma tarefa suplementar, rever a Atividade 2-15, porque esse mesmo tipo de simetria foi explorado lá. Você pode, inclusive, partir da conclusão expressa no primeiro dos dois quadros acima para obter a igualdade (69).)

Atividade 2-85: A Fig. 22 ilustra uma circunferência de raio R centrada na origem do plano xy, além de um ponto P da mesma e de um ângulo δ formado pela linha reta que liga P à origem do plano xy e pela parte não negativa do eixo x. Como usual, considere que δ é nulo para P na parte positiva do eixo x (ou seja, para $\mathrm{P} = (R, 0)$), e que seu valor aumenta quando P se move sobre a circunferência no sentido anti-horário. A equação desta circunferência é:

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{273}$$

Devemos entender que cada par ordenado (x, y) que satisfaz esta equação corresponde a um ponto da circunferência, e cada ponto da circunferência corresponde a um par ordenado (x, y) que satisfaz esta equação. Convença-se disto (faça uso do teorema de Pitágoras).

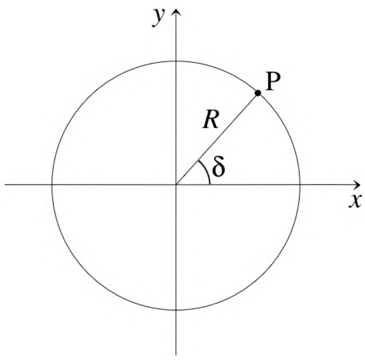


Figura 22: Atividade 2-85.

a) Diferenciando implicitamente a igualdade (273), obtenha a equação $y = ax + b$ da reta tangente à circunferência no ponto P. De antemão, perceba, geometricamente, que a é função de δ, apenas, enquanto b é função de R e δ. (Dica: em algum ponto do desenvolvimento, substitua x por $R\cos\delta$ e y por $R\,\mathrm{sen}\,\delta$.)
b) Teste a equação da reta que você obteve no item **a** para os seguintes casos particulares: $\delta = \pi/4$, $\delta = \pi/2$ e $\delta = -\pi/4$. E mostre que não podemos fazer $\delta = 0$ (como esperado).
c) Usando um aplicativo como o Geogebra, trace, a partir da equação (273), a circunferência de raio $R = 2$ centrada na origem do plano xy. Em seguida escreva, no aplicativo, a equação da reta que você obteve no item **a**, com $R = 2$, deixando δ como um parâmetro livre. Daí, faça δ variar de 0 a 2π, e observe as retas tangentes traçadas pelo aplicativo. Se possível, produza uma animação. O resultado é muito interessante![113]

Atividade 2-86: Esta atividade é semelhante à Atividade 2-85, mas com uma elipse no lugar de uma circunferência. Definiremos elipses e estudaremos suas equações na Parte IV desta série, mas podemos adiantar (ou talvez você tenha visto no ensino médio) que a elipse mostrada na Fig. 23 tem equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{274}$$

É a mesma ideia apresentada nas duas atividades anteriores: cada par ordenado (x, y) que satisfaz esta equação corresponde a um ponto da elipse, e cada ponto da elipse corresponde a um par ordenado (x, y) que satisfaz esta equação.
a) Escreva a equação (274), com valores escolhidos para a e b (na Fig. 23 temos $a = 3$ e $b = 2$), em um aplicativo como o Geogebra, para que ele trace a elipse correspondente. Brinque um pouco, variando os valores de a e b.

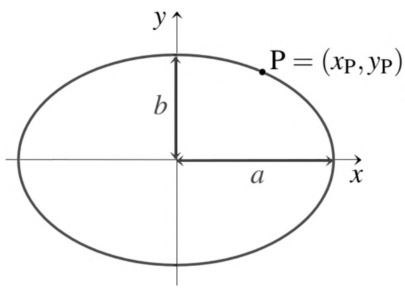


Figura 23: Atividade 2-86.

[113]Como você mostrou no item **b**, não podemos fazer $\delta = 0$ na equação da reta obtida. Analogamente, também não podemos fazer $\delta = \pi$, nem $\delta = 2\pi$, como você pode verificar. Mas não se preocupe com isso: provavelmente o aplicativo simplesmente irá ignorar esses valores de δ, ao traçar as retas tangentes, se você pedi-lo para fazer δ variar de 0 a 2π; ou então irá completar essas lacunas.

b) Mostre que no caso particular em que $a = b$, a equação (274) recai na equação (273) - assim demonstrando que a circunferência é um tipo particular de elipse. Em seguida, teste essa conclusão escolhendo valores iguais para a e b no aplicativo usado no item **a**.
c) Diferenciando implicitamente a igualdade (274), mostre que a equação da reta tangente à elipse no ponto $\mathrm{P} = (x_\mathrm{P}, y_\mathrm{P})$ (veja a Fig. 23), com $-a < x_\mathrm{P} < a$, pode ser escrita como

$$y = -\mathrm{sgn}(y_\mathrm{P}) \frac{ab}{\sqrt{a^2 - x_\mathrm{P}^2}} \left(\frac{x_\mathrm{P}}{a^2} x - 1 \right) \quad (-a < x_\mathrm{P} < a), \tag{275}$$

em que sgn é a chamada *função sinal*, assim definida:

$$\boxed{\mathrm{sgn}(x) \equiv \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x < 0; \\ 0 & \text{se} \quad x = 0; \\ 1 & \text{se} \quad x > 0. \end{cases}} \tag{276}$$

Assim, temos, em (275):

$$\mathrm{sgn}(y_\mathrm{P}) \equiv \begin{cases} -1 & \text{se} \quad y_\mathrm{P} < 0; \\ 0 & \text{se} \quad y_\mathrm{P} = 0; \\ 1 & \text{se} \quad y_\mathrm{P} > 0. \end{cases}$$

Perceba que podemos reescrever a igualdade (275) como

$$y = \pm \frac{ab}{\sqrt{a^2 - x_\mathrm{P}^2}} \left(\frac{x_\mathrm{P}}{a^2} x - 1 \right) \quad (-a < x_\mathrm{P} < a),$$

mas aí temos que deixar claro, à parte, que o sinal "$+$", em "$\pm$", deve ser usado quando temos $y_\mathrm{P} < 0$, e que o sinal "$-$" deve ser usado quando temos $y_\mathrm{P} > 0$. O uso da função sinal torna as coisas mais simples, não acha?
d) Usando um aplicativo como o Geogebra, trace, a partir da equação (274), a elipse com $a = 3$ e $b = 2$, centrada na origem do plano xy. Em seguida escreva, no aplicativo, a equação (275), com $a = 3$, $b = 2$, e considerando $y_\mathrm{P} > 0$. Daí, faça x_P variar de -3 a 3 (ou seja, de $-a$ a a), e observe as retas tangentes traçadas pelo aplicativo. Se possível, produza uma animação.

Atividade 2-87: Considere a família de funções $y(x)$ implicitamente definidas pela igualdade

$$y^2 e^y = x. \tag{277}$$

a) Escreva esta igualdade em um aplicativo como o Geogebra, para que ele trace a curva que corresponde a esta equação - no sentido de que cada par ordenado (x, y) que satisfaz esta equação corresponde a um ponto da curva, e cada ponto da curva corresponde a um par ordenado (x, y) que satisfaz esta equação.
b) A partir da curva traçada (faça uso de uma janela que inclua os intervalos $-1 < x < 9$ e $-8 < y < 2$), identifique quantas funções $y(x)$, no mínimo, estão implicitamente definidas pela igualdade (277). (Dica: esse número se estende ao infinito através de restrições de domínio; mas não nos interessam, aqui, restrições de domínio além do estritamente necessário.)
c) Quais são os domínios das funções identificadas no item **b**? Em cada caso, considere o maior domínio possível. (Dica: você pode realizar uma diferenciação implícita, neste item, mas considere, em vez disso, encarar x como uma função de y, em (277).)

Atividade 2-88: No projeto *Matemática para Física*, introduzimos diferenciação implícita, formalmente, apenas nesta subseção. Mas você percebeu que fizemos uso dela antes?

a) No primeiro texto do projeto (Silva & Peixoto 2020), estendemos a regra da potência: de expoentes inteiros para expoentes racionais. Releia o tópico *Regra da potência com expoente racional* $r \neq 0$ (que ocupa menos de uma página), e identifique em que ponto realizamos uma diferenciação implícita.
b) Neste texto aqui, realizamos uma diferenciação implícita na subseção 2.2.3: quando derivamos, em (66), ambos os membros da primeira das igualdades em (64). Confira lá.

Atividade 2-89: Na Atividade 2-43 você obteve a derivada da função e^x de duas formas (nos itens **a** e **b**). Reveja. Aqui, exploraremos uma terceira forma. Lembrando que e^x e $\ln x$ são funções inversas, uma da outra, podemos dizer que a função $y = e^x$ está implicitamente definida pela igualdade

$$\ln y = x,$$

concorda? Diferenciando implicitamente y em relação a x, na igualdade acima, obtenha

$$y'(x) = [e^x]' = e^x.$$

É interessante comparar o que você fez, nesta atividade, com o que você fez no item **b** da Atividade 2-43.

Atividade 2-90: No desenvolvimento em (70), você obteve, explorando a notação de Leibniz, a derivada da função $y(x) = \sqrt{x}$ (com $x > 0$), encarada como a inversa da função $f(x) = x^2$ (com $x > 0$). Aqui, você fará algo ligeiramente diferente (compare com o desenvolvimento em (70)): diferenciará, implicitamente, y em relação a x, na igualdade $y^2 = x$.

Diferenciação logarítmica

A chamada *diferenciação logarítmica* é uma aplicação da técnica de diferenciação implícita na tentativa de se obter, de forma mais simples, derivadas de funções complicadas envolvendo produtos, quocientes, potências ou raízes. Como exemplo, vamos calcular a derivada da função

$$y(x) = \frac{x^4\sqrt{2x^2 - x}}{(x^2+1)^2}.$$

Primeiro, faremos isso do modo usual, até aqui. Percebe que vai dar um trabalhinho? Respire fundo, e vamos lá.

Em primeiro lugar, observe que esta função só está definida para os valores de x tais que $2x^2 - x \geq 0$. Temos:

$$2x^2 - x \geq 0 \implies x(2x-1) \geq 0 \implies$$

$$(x=0) \text{ ou } (\underbrace{2x-1=0}_{x=\frac{1}{2}}) \text{ ou } \underbrace{(x>0 \text{ e } \underbrace{2x-1>0}_{x>\frac{1}{2}})}_{x>\frac{1}{2}} \text{ ou } \underbrace{(x<0 \text{ e } \underbrace{2x-1<0}_{x<\frac{1}{2}})}_{x<0} \implies$$

$$x \leq 0 \text{ ou } x \geq \frac{1}{2}.$$

Portanto, a função $y(x)$ acima só está definida para $x \leq 0$ ou $x \geq 1/2$.[114] Podemos então escrever,

[114] Outra forma de chegarmos a esta conclusão é traçando o gráfico da função quadrática $2x^2 - x$, e observando que ele intercepta o eixo x (ou seja, a reta $y = 0$) nos pontos $x = 0$ e $x = 1/2$, e que está acima do eixo x nas regiões $x < 0$ e $x > 1/2$.

explicitamente:

$$y(x) = \frac{x^4\sqrt{2x^2-x}}{(x^2+1)^2}, \;\; \text{com } x \leq 0 \;\; \text{ou} \;\; x \geq \frac{1}{2}. \tag{278}$$

Para conferir que o intervalo $(0, 1/2)$ não está contido no domínio desta função $y(x)$, use um aplicativo como o Geogebra para traçar o gráfico da mesma (sem informar ao aplicativo a restrição $x \leq 0$ ou $x \geq 1/2$, é claro; deixe que ele mesmo a identifique).

Muito bem, passemos ao cálculo da derivada de $y(x)$ "*por força bruta*". Detalhamos as contas para que você consiga acompanhá-las apenas lendo, e também para deixar claro que o cálculo é relativamente longo. Vamos lá:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{[x^4\sqrt{2x^2-x}]'\,(x^2+1)^2 - x^4\sqrt{2x^2-x}\,[(x^2+1)^2]'}{[(x^2+1)^2]^2} \\ &= \frac{\left[4x^3\sqrt{2x^2-x} + x^4\frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x}}\right](x^2+1)^2 - x^4\sqrt{2x^2-x}\,\left[2(x^2+1)(2x)\right]}{(x^2+1)^4}, \end{aligned} \tag{279}$$

com $x < 0$ ou $x > 1/2$ (não podemos ter $x = 0$, nem $x = 1/2$, devido à presença de $\sqrt{2x^2-x}$ em um denominador, na expressão acima). Poderíamos parar por aqui, mas vamos fazer um esforço para simplificar esta expressão imensa:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{\left[\frac{8x^3(2x^2-x)+x^4(4x-1)}{2\sqrt{2x^2-x}}\right](x^2+1)^2 - 4x^5\sqrt{2x^2-x}\,(x^2+1)}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{\left[\frac{8x^3(2x^2-x)+x^4(4x-1)}{2\sqrt{2x^2-x}}\right](x^2+1) - 4x^5\sqrt{2x^2-x}}{(x^2+1)^3} \\ &= \frac{\left[8x^3(2x^2-x)+x^4(4x-1)\right](x^2+1) - 8x^5(2x^2-x)}{2\sqrt{2x^2-x}\,(x^2+1)^3} \\ &= \frac{[\cancel{8x^5(2x^2-x)} + x^6(4x-1)] + [8x^3(2x^2-x)+x^4(4x-1)] - \cancel{8x^5(2x^2-x)}}{2(x^2+1)^3\sqrt{2x^2-x}} \\ &= \frac{x^6(4x-1) + 8x^3(2x^2-x) + x^4(4x-1)}{2(x^2+1)^3\sqrt{2x^2-x}} = \frac{(x^6+x^4)(4x-1) + 8x^3(2x^2-x)}{2(x^2+1)^3\sqrt{2x^2-x}} \\ &= \frac{x^4(x^2+1)(4x-1) + 8x^3(2x^2-x)}{2(x^2+1)^3\sqrt{2x^2-x}} = \frac{x^4(4x^3-x^2+4x-1) + 16x^5 - 8x^4}{2(x^2+1)^3\sqrt{2x^2-x}} \\ &= \frac{4x^7 - x^6 + 4x^5 - x^4 + 16x^5 - 8x^4}{2(x^2+1)^3\sqrt{2x^2-x}}, \end{aligned}$$

e, finalmente,

$$y'(x) = \frac{4x^7 - x^6 + 20x^5 - 9x^4}{2(x^2+1)^3\sqrt{2x^2-x}}, \;\; \text{com } x < 0 \;\; \text{ou} \;\; x > \frac{1}{2}. \tag{280}$$

Bem melhor que a expressão em (279), não acha? Mas deu trabalho.

Veremos logo adiante como se dá a diferenciação logarítmica da função $y(x)$ em (278). Mas, antes, precisamos destacar um detalhe técnico. Revise a Atividade 2-27. Observe os resultados em (98), (99) e (100). Podemos combinar aqueles resultados para obter, por exemplo (com $b = e$):

$$\frac{a_1}{a_2}a_3^\gamma > 0 \implies \ln\left(\frac{a_1}{a_2}a_3^\gamma\right) = \ln|a_1| - \ln|a_2| + \gamma\ln|a_3|. \tag{281}$$

Não estaria correto escrevermos

$$\ln\left(\frac{a_1}{a_2}a_3^\gamma\right) = \ln a_1 - \ln a_2 + \gamma\ln a_3$$

se $(a_1/a_2)a_3^\gamma > 0$, mas $a_1 < 0$ ou $a_2 < 0$ ou $a_3 < 0$, concorda?

Agora sim, vejamos como se dá a diferenciação logarítmica da função $y(x)$ em (278). Primeiro, vamos tomar o logaritmo natural de ambos os membros da igualdade (278). É claro, só podemos fazer isso com $y(x) > 0$ - ou seja, para $x < 0$ ou $x > 1/2$ -, pois $\ln y(x)$ não está definido (em $\mathbb{R}$) para $y(x) \leq 0$. Obtemos:

$$\ln y(x) = \ln\left(\frac{x^4\sqrt{2x^2-x}}{(x^2+1)^2}\right) = 4\ln|x| + \frac{1}{2}\ln(2x^2-x) - 2\ln(x^2+1), \text{ com } x<0 \text{ ou } x>\frac{1}{2}.$$

Com um pouco de prática com o uso de propriedades de logaritmos e com manipulações algébricas, você escreve esta última igualdade diretamente, como fizemos acima. Mas se preferir, faça em mais etapas. De todo modo, observe o detalhe técnico de termos escrito, no primeiro termo do membro mais à direita, $\ln|x|$, em vez de $\ln x$. Não foi necessário escrevermos $\ln|2x^2-x|$, porque vimos que com $x < 0$ ou $x > 1/2$ temos $2x^2 - x > 0$. Também não foi necessário escrevermos $\ln|x^2+1|$, porque x^2+1 é sempre positivo. Muito bem, agora vamos derivar (implicitamente):[115]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln y(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(4\ln|x| + \frac{1}{2}\ln(2x^2-x) - 2\ln(x^2+1)\right) \implies$$

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{4}{x} + \frac{4x-1}{2(2x^2-x)} - \frac{2(2x)}{x^2+1} \implies$$

$$y'(x) = \frac{x^4\sqrt{2x^2-x}}{(x^2+1)^2}\left[\frac{4}{x} + \frac{4x-1}{2(2x^2-x)} - \frac{4x}{x^2+1}\right], \text{ com } x<0 \text{ ou } x>\frac{1}{2}.$$

Podemos parar aqui, concorda? A ideia é não precisarmos ter o trabalho de somar as três frações entre colchetes, acima. A técnica de diferenciação logarítmica produziu, rapidamente, este resultado. Uma beleza, não acha? Só para mostrarmos que este resultado corresponde àquele em (280), vamos somar as três frações entre colchetes (e, em nossa opinião, ainda assim o caminho será menos árduo que sem o uso da técnica de diferenciação logarítmica). Temos:

$$y'(x) = \frac{x^4\sqrt{2x^2-x}}{(x^2+1)^2}\left[\frac{8(2x^2-x)(x^2+1) + (4x-1)x(x^2+1) - 4x(2x(2x^2-x))}{2x(2x^2-x)(x^2+1)}\right]$$

$$= \frac{x^3}{2(x^2+1)^3\sqrt{2x^2-x}}\overbrace{\left[8(2x^2-x)(x^2+1) + (4x-1)x(x^2+1) - 4x(2x(2x^2-x))\right]}^{(\cancel{8x^2}+8-\cancel{8x^2})(2x^2-x)+(4x-1)(x^3+x)}$$

$$= \frac{x^3}{2(x^2+1)^3\sqrt{2x^2-x}}\overbrace{\left[16x^2 - 8x + 4x^4 - x^3 + 4x^2 - x\right]}^{4x^4-x^3+20x^2-9x},$$

[115] Revise a igualdade (133).

e, finalmente,

$$y'(x) = \frac{4x^7 - x^6 + 20x^5 - 9x^4}{2(x^2+1)^3\sqrt{2x^2 - x}}, \text{ com } x < 0 \text{ ou } x > \frac{1}{2}, \tag{282}$$

que é a mesma expressão obtida em (280).

Ficou claro por que a diferenciação logarítmica deixa mais simples o cálculo de derivadas de funções complicadas envolvendo produtos, quocientes, potências ou raízes? Principalmente porque logaritmos transformam produtos e quocientes em somas e diferenças, respectivamente, e é bem mais fácil derivar somas e diferenças que produtos ou quocientes.

Atividade 2-91: a) Mostre que a função

$$y(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{\left(x^4 + \frac{1}{2}\right)^3}$$

está definida, em $\mathbb{R}$, para todo x real.
b) Use a técnica de diferenciação logarítmica para calcular $y'(x)$.

A técnica de diferenciação logarítmica pode ser aplicada, com uma adaptação, mesmo a funções que - diferentemente das duas funções exploradas até aqui, neste tópico - assumem valores negativos em parte de seu domínio. A Atividade 2-92 explora isso, e pode ser considerada opcional (realize-a se você estiver curioso ou curiosa a respeito, mas provavelmente não fará uso disso em suas disciplinas da graduação em física).

Atividade 2-92: Nesta atividade, vamos considerar uma função relativamente simples, mas que assume valores negativos em parte de seu domínio. Seja

$$y(x) = (x-1)^3(x^2+1)^4, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{283}$$

a) Calcule $y'(x)$ sem o uso da técnica de diferenciação logarítmica.
b) Para que valores de x temos $y(x) \leq 0$? Perceba que a expressão $\ln y(x)$ não está correta (em $\mathbb{R}$) para tais valores de x.[116]
c) Sua tarefa, daqui até o final desta atividade, é mostrar que a técnica de diferenciação logarítmica, com uma adaptação, leva à mesma expressão para $y'(x)$ que você obteve no item **a** - o que inclui os valores de x para os quais temos $y(x) \leq 0$ (que você identificou no item **b**). A adaptação é relativamente óbvia: consiste no cálculo da derivada de $\ln|y(x)|$, em vez da derivada de $\ln y(x)$. (Dica: faça uso do resultado em (133).) Mas perceba que esse cálculo não vale para x tal que $y(x) = 0$ - ou seja, não vale para $x = 1$ -, embora valha para x tal que $y(x) < 0$ (pois estamos calculando a derivada de $\ln|y(x)|$, em vez da derivada de $\ln y(x)$). Trataremos do caso em que $x = 1$ no próximo item.
d) Perceba que podemos incluir o ponto $x = 1$ no domínio da função $y'(x)$ obtida no item **c**, porque a função inicial, $y(x) = (x-1)^3(x^2+1)^4$, pode ser reescrita mais explicitamente como uma função polinomial, e funções polinomiais possuem derivadas em todos os pontos de seu domínio (afinal, a derivada de uma função polinomial é também uma função polinomial, e funções polinomiais podem ser definidas para todos os números reais). Ou seja, a expressão obtida para $y'(x)$ no item **c**, que vale para $x \neq 1$, vale também para $x = 1$. A técnica de diferenciação logarítmica produziu, no item **c**, uma espécie de "exclusão temporária" do ponto $x = 1$ do domínio de $y'(x)$, mas esse ponto pode ser reincluído no domínio de $y'(x)$, ao final, pelo que foi explicado acima.

[116] Uma curiosidade: trabalhando com números complexos, podemos definir logaritmos de números negativos. Temos, por exemplo, $\ln(-1) = i(\pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Trata-se de uma *função multivalorada*. Temos o chamado *valor principal* de $\ln(-1)$ com $n = 0$: $i\pi$. Contudo, mesmo trabalhando com números complexos, não definimos $\ln 0$.

Atividade 2-93: Na subseção 2.2.1 - mais especificamente no tópico *funções algébricas* - dissemos que ainda não demonstramos a regra da potência para expoentes irracionais; só até expoentes racionais (Silva & Peixoto 2020). E dissemos que faríamos a demonstração da regra da potência para expoentes reais (que incluem, portanto, os irracionais) aqui nesta subseção. Chegou o momento.
a) Seja $f(x) = x^s$, em que s é um número real não nulo qualquer. (Entenda que não precisamos considerar $s = 0$ porque temos, neste caso, $f(x) = x^0 = 1$ para todo $x \neq 0$,[117] e sabemos que a derivada de uma função constante é a função nula. Ou seja, não precisamos da regra da potência no caso em que $s = 0$.) Dependendo do valor de s, $f(x)$ pode estar ou não estar definida para $x \leq 0$. Por exemplo, com $s = 3$, $f(x) = x^s = x^3$ está definida para todo x real, mas como $s = 1/2$, $f(x) = x^s = x^{1/2}$ só está definida para $x \geq 0$, e (como você sabe) sua derivada só existe para $x > 0$. *Considerando os valores de x para os quais a função $f(x) = x^s$ está bem definida em $\mathbb{R}$, e sua derivada existe*, use a técnica de diferenciação logarítmica para mostrar que

$$\boxed{[x^s]' = s x^{s-1} \quad (s \in \mathbb{R}^*).} \tag{284}$$

Assim, temos, por exemplo: $[x^\pi]' = \pi x^{\pi-1}$. (Dica: para que sua demonstração valha não só para $x > 0$, mas também para $x < 0$ - supondo que s é um número real tal que x^s está definida para $x < 0$ -, comece definindo $f(x) = x^s$, e escreva: $\ln|f(x)| = \ln|x^s| = \ln|x|^s$. Perceba que o resultado final vale também para $x = 0$, se não há problema, para $x = 0$, com a função $f(x) = x^s$, nem com a expressão para a sua derivada.)
b) Naturalmente, precisamos ter clareza quanto ao significado de uma potência como x^π, ou, mais especificamente, digamos, 2^π. Podemos encará-la como um limite:

$$2^\pi = \lim_{s \to \pi} 2^s.$$

Ou seja, 2^π é o número real para o qual tende 2^s, quando s tende a π. Obtemos aproximações sucessivamente melhores para 2^π tomando, em 2^s, valores de s cada vez mais próximos de π. Uma aproximação pode ser, com $s = 3{,}14159$:

$$2^\pi \approx 2^{3{,}14159} = 2^{\frac{314159}{100000}},$$

e este é o número que, elevado a 100000, é igual a 2^{314159}, concorda? Usando uma calculadora eletrônica, ou algum aplicativo, obtenha, com aproximação de 5 casas decimais: 2^π e $2^{\frac{314159}{100000}}$, e compare os resultados.

Atividade 2-94: Usando a técnica de diferenciação logarítmica, calcule as derivadas das seguintes funções:
a) $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$. (Compare com a forma como você obteve a derivada desta função no item **e** da Atividade 2-45, fazendo uso da igualdade (147).)
b) $g(x) = x^x$, $x > 0$. (Compare com a forma como você obteve a derivada desta função no item **a** da Atividade 2-47.)
c) $h(x) = 5^{-x^2}$.

[117] Dependendo do contexto, 0^0 pode ser convenientemente definido como sendo igual a 1, ou pode ser uma expressão sem significado definido - talvez uma *indeterminação*. Faremos essa discussão na Parte II-B desta série.

Taxa de variação relativa

Vamos revisar o conceito de *variação relativa* (ou *diferença relativa*). Seja y uma função de x. Quando esta variável independente sofre uma variação Δx, a partir de um certo valor x, a variação correspondente em y é

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x).$$

Trata-se de uma *variação absoluta* de y. (O termo "variação absoluta" não é usado, aqui, no sentido de "módulo", mas para diferenciar tal variação de uma "variação relativa", que será revisada a seguir.) A *variação relativa* correspondente de y é:

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{y(x)} \quad (\text{se } y(x) \neq 0). \tag{285}$$

Vamos exemplificar, de forma muito simples, a utilidade do conceito de variação relativa na Atividade 2-95.

Atividade 2-95: Um casal de namorados decide noivar, e está em dúvida entre comprar um par de alianças de 1 g, 2 g, 3 g ou 4 g. O casal deseja alianças mais pesadas (com ambas de mesmo peso), mas também pretende economizar. Daí observa que a aliança de 4 g não difere tanto, em sua aparência, da aliança de 3 g, enquanto a aliança de 3 g difere comparativamente mais, em sua aparência, da aliança de 2 g, e a aliança de 2 g difere mais ainda da aliança de 1 g. Ora, nos três casos, a variação absoluta na massa, da aliança mais leve para a mais pesada, é de 1 g. Contudo, a variação relativa muda, de um caso para outro. Calcule essas variações relativas, e as *variações relativas percentuais* correspondentes, e sugira qual seria uma boa compra para o casal - considerando os critérios de satisfação e economia.

Atividade 2-96: Seja y uma função de x. Sabemos, muito bem, que podemos interpretar a derivada $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ como uma *taxa de variação* de y com respeito a x. Mas podemos estar interessados em uma *taxa de variação relativa* de y com respeito a x:

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{d}y/y}{\mathrm{d}x}.$$

Pense $\mathrm{d}y/y$ como a *variação relativa* de y, quando x sofre uma variação $\mathrm{d}x$.[118]
a) Considerando $y(x) > 0$ em todo o seu domínio, mostre que podemos reescrever

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad \text{como} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln y(x). \tag{286}$$

Se a função $y(x)$ for adequada a uma diferenciação logarítmica, justifica-se o uso da última expressão em (286), para o cálculo da taxa de variação relativa de y com respeito a x.
b) Calcule sem, e depois com, o uso da técnica de diferenciação logarítmica a taxa de variação relativa da função

$$y(x) = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^4.$$

[118] Evitamos escrever "taxa de variação relativa de y em relação a x" porque isso pode gerar dificuldades de compreensão. Optamos por escrever, em vez disso: "taxa de variação relativa de y com respeito a x". Aqui, o termo "relativa" se refere a estarmos tomando, no lugar da variação absoluta $\mathrm{d}y$, a variação relativa $\mathrm{d}y/y$, quando x sofre uma variação $\mathrm{d}x$.

c) Mostre que toda função exponencial $f(x) = b^x$, com $0 < b \neq 1$, possui uma taxa de variação relativa constante. E mostre que no caso particular da função $f(x) = e^x$ a taxa de variação relativa é sempre igual a 1. O que isso significa? Converse com seus colegas a respeito.

Entenda que a taxa de variação relativa de uma função $y(x)$ nos dá a taxa de variação de y com respeito a x, porém *dimensionada* ou *normalizada* pelo valor de y, no ponto x considerado.

Atividade 2-97: Você deve lembrar, de seu estudo da física do ensino médio, do fenômeno da dilatação térmica: o aumento de tamanho de um corpo quando ele sofre um aumento de temperatura. Vamos considerar, de início, um corpo com a forma de um cubo de lado L. Vamos supor que esse corpo é *homogêneo* (ou seja, suas características não variam de um ponto a outro) e *isotrópico* (isto é, suas propriedades não variam de uma direção do espaço para outra; por exemplo, ele não dilata mais na direção de uma determinada aresta do cubo que em uma direção perpendicular a essa). Para muitos materiais, é observado, experimentalmente, que ao submeter tal corpo a uma pequena variação de temperatura $\Delta T > 0$ (em comparação com a temperatura absoluta T inicial do corpo), cada uma de suas arestas sofre uma variação ΔL, positiva e muito menor que L, que é aproximadamente proporcional a L e a ΔT. Denotando a constante de proporcionalidade (positiva) por α, e chamando-a de *coeficiente de dilatação linear* do material que constitui o corpo, temos:

$$\Delta L \approx \alpha L \Delta T \quad (\text{para } \Delta T \text{ suficientemente pequeno}). \tag{287}$$

Não é difícil darmos um significado físico à relação de proporcionalidade entre ΔL e L: podemos supor que, havendo uma pequena variação de temperatura $\Delta T > 0$, *há um pequeno aumento Δl na distância média l entre átomos vizinhos, na direção de uma aresta do corpo*, e que *esse aumento independe do valor de L*. Havendo aproximadamente N átomos enfileirados ao longo de uma aresta (sendo N um número enorme, é claro), temos $L = Nl$, e, portanto, $\Delta L = N\Delta l$. Segue que

$$\Delta L = N\Delta l = \frac{L}{l}\Delta l = \frac{\Delta l}{l}L, \tag{288}$$

e, portanto, ΔL é proporcional a L. Este resultado pode ser encarado, de forma mais direta, como resultante da relação de proporção

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta l}{l}.$$

Muito bem, podemos supor, adicionalmente, que $(\Delta l)/l$ é aproximadamente proporcional a ΔT, e então convém escrevermos:

$$\frac{\Delta l}{l} \approx \alpha \Delta T, \tag{289}$$

sendo a constante de proporcionalidade α o já citado coeficiente de dilatação linear do material que constitui o corpo. Trata-se de uma característica do material. De (288) e (289), segue a aproximação em (287). Mas perceba que a relação (289) não tem o mesmo apelo intuitivo que a relação (288); a relação de proporcionalidade (289) foi um pouco forçada, não acha? Um dos objetivos desta atividade é mostrar que a relação de proporcionalidade ente ΔL e ΔT, em (287) (que pode ser encarada como consequência da relação (289)), é mesmo problemática - a menos que ΔT seja suficientemente pequeno (e deixaremos claro o que significa, neste caso, ΔT ser suficientemente pequeno).

a) Vamos elevar a temperatura do corpo, de T a $T + \Delta T$, em duas etapas: (1) de T a $T + (\Delta T)/2$, e (2) de $T + (\Delta T)/2$ a $T + \Delta T$. Ou seja, em cada etapa estamos produzindo uma variação $(\Delta T)/2$ na temperatura do corpo. Aplique a aproximação (287) a cada uma destas duas etapas, e obtenha a seguinte expressão para a variação total de comprimento de cada aresta do cubo:

$$\Delta L \approx \alpha L \Delta T + \frac{1}{4}\alpha^2 L(\Delta T)^2 = \alpha L\left(\Delta T + \frac{1}{4}\alpha(\Delta T)^2\right).$$

Observe que ΔL, neste resultado, é proporcional a L, mas não a ΔT. Podemos reescrever:

$$\frac{\Delta L}{L} \approx \alpha \Delta T + \frac{1}{4}(\alpha \Delta T)^2.$$

Mas note que esta aproximação nos leva de volta à aproximação em (287), se tivermos $|\alpha \Delta T| \ll 1$ (pois sendo $|\alpha \Delta T|$ bem menor que 1, $(\alpha \Delta T)^2$ é bem menor ainda, e então o termo $(\alpha \Delta T)^2/4$ pode ser desprezado).

b) Agora, vamos elevar a temperatura do corpo, de T a $T + \Delta T$, em três etapas, produzindo a mesma variação de temperatura $(\Delta T)/3$ em cada uma delas. Aplique a aproximação (287) a cada uma destas três etapas, e obtenha a seguinte expressão para a variação total de comprimento de cada aresta do cubo:

$$\Delta L \approx \alpha L \Delta T + \frac{1}{3}\alpha^2 L(\Delta T)^2 + \frac{1}{27}\alpha^3 L(\Delta T)^3.$$

Novamente, observe que ΔL, no resultado obtido, é proporcional a L, mas não a ΔT. Podemos reescrever:

$$\frac{\Delta L}{L} \approx \alpha \Delta T + \frac{1}{3}(\alpha \Delta T)^2 + \frac{1}{27}(\alpha \Delta T)^3.$$

Note que, como no item **a**, esta aproximação nos leva de volta à aproximação em (287), se tivermos $|\alpha \Delta T| \ll 1$. Ou seja, não parece haver problema com a aproximação em (287), desde que tenhamos $|\alpha \Delta T| \ll 1$. Daremos uma base mais sólida a esta afirmação no item **d**.

c) Como a relação em (287) é uma aproximação, válida para ΔT suficientemente pequeno, convém definirmos o coeficiente de dilatação linear tomando, na relação

$$\alpha \approx \frac{(\Delta L)/L}{\Delta T},$$

o limite em que ΔT tende a zero. Temos, assim:

$$\alpha \equiv \lim_{\Delta T \to 0} \frac{(\Delta L)/L}{\Delta T} = \frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}T}. \tag{290}$$

Ou seja, α *é a taxa de variação relativa de L com respeito a* T. Bacana, não acha?! Entenda que não necessariamente α é constante; ele pode ser função (não constante) de T. Mas considerando α constante, obtenha, a partir da igualdade

$$\frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}T} = \alpha, \tag{291}$$

que pode ser encarada como uma equação diferencial para $L(T)$, a seguinte expressão para ΔL:[119]

$$\Delta L = L\left(e^{\alpha \Delta T} - 1\right). \tag{292}$$

Trata-se de uma relação bem diferente daquela em (287), concorda? (Dica: considere, em seu desenvolvimento, a temperatura variando de T a $T + \Delta T$, e o comprimento de uma aresta do

[119] Note a relação de proporcionalidade entre ΔL e L.

cubo variando de L a $L+\Delta L$.)
d) Mostre que se tivermos $|\alpha\Delta T| \ll 1$, a relação (287) é uma primeira aproximação para a relação (292). Ou seja, mostre que

$$\text{se } |\alpha\Delta T| \ll 1 \text{ (com } \alpha \text{ constante), então } \Delta L = L\left(e^{\alpha\Delta T}-1\right) \approx \alpha L\Delta T.$$

Ou seja,

$$\Delta L \approx \alpha L\Delta T, \ \text{ se } |\alpha\Delta T| \ll 1. \tag{293}$$

(Dica: faça uso da aproximação linear local $e^x \approx 1+x$, para $|x| \ll 1$; veja (222).)
e) Observe que, no item **a**, elevando a temperatura do corpo, de T a $T+\Delta T$, em duas etapas, obtivemos para a razão $(\Delta L)/L$ o termo quadrático $(\alpha\Delta T)^2/4$. Já no item **b**, elevando a temperatura do corpo, de T a $T+\Delta T$, em três etapas, obtivemos para a razão $(\Delta L)/L$ o termo quadrático $(\alpha\Delta T)^2/3$. Ou seja, passamos do fator $1/4$ para um fator maior: $1/3$. Podemos supor que continuando com o processo de elevação da temperatura do corpo, de T a $T+\Delta T$, em mais e mais etapas, o fator que multiplica $(\alpha\Delta T)^2$ continuaria aumentando. A questão é: tenderia a que valor? Encontre a resposta usando, em (292), uma aproximação de segunda ordem para $e^{\alpha\Delta T}$. (Veja a aproximação em (235).)
f) Se o corpo, homogêneo e isotrópico, tem a forma de um paralelepípedo de lados L_1, L_2 e L_3, em vez de um cubo de lado L, podemos aplicar a aproximação em (293) a cada uma das três direções mutuamente ortogonais, obtendo:

$$\begin{aligned}
\Delta L_1 &\approx \alpha L_1\Delta T,\\
\Delta L_2 &\approx \alpha L_2\Delta T,\\
\Delta L_3 &\approx \alpha L_3\Delta T,
\end{aligned}$$

se $|\alpha\Delta T| \ll 1$, sendo α o coeficiente de dilatação linear do material que constitui o corpo. Mostre que a variação de volume do paralelepípedo, ΔV, resultante dessa dilatação térmica, pode ser aproximada para

$$\Delta V \approx \gamma V\Delta T, \ \text{ com } \gamma \equiv 3\alpha, \ \text{ se } |\alpha\Delta T| \ll 1. \tag{294}$$

Chamamos γ de *coeficiente de dilatação volumétrica* do material que constitui o corpo.[120] (Dica: calcule a razão $(\Delta V)/V$, com $\Delta V = (L_1+\Delta L_1)(L_2+\Delta L_2)(L_3+\Delta L_3) - L_1L_2L_3$, e observe que alguns termos são muito menores que outros, se $|\alpha\Delta T| \ll 1$, e por isso podem ser desprezados.)
g) Convença-se de que, em princípio, a aproximação em (294) se aplica não apenas a um paralelepípedo, mas a um corpo de formato qualquer - desde que seja homogêneo e isotrópico. Você pode imaginar esse corpo como formado por uma enorme quantidade de pequenos paralelepípedos, como se fossem pequeníssimas peças de LEGO, só que maciças. Se possível, converse com seus colegas a respeito.
h) Mostre que se o corpo tem a forma de um cilindro delgado, como um fio metálico fino, e sofre uma variação de temperatura ΔT, a dilatação térmica resultante em uma direção perpendicular à do eixo do cilindro é desprezível, em comparação com a dilatação térmica na direção do eixo do cilindro (embora a dilatação térmica *relativa* seja a mesma - e é justamente aqui que está o ponto-chave da questão). Isso justifica analisarmos, muitas vezes, apenas a dilatação no comprimento de um fio metálico (fazendo uso da aproximação em (293)), desprezando a dilatação em seu diâmetro.
i) Analogamente, mostre que se o corpo tem a forma de uma placa de pequena espessura - como uma lâmina, uma chapa fina, uma folha metálica, etc. - e sofre uma variação de temperatura ΔT,

[120] Perceba que podemos definir γ como a taxa de variação relativa de V com respeito a T.

a dilatação térmica resultante em sua espessura é desprezível, em comparação com a dilatação térmica em uma direção ao longo da placa. Isso justifica analisarmos, muitas vezes, apenas a variação ΔA na área da placa, devido à variação de temperatura ΔT, desprezando a dilatação em sua espessura. Em seguida, mostre que ΔA pode ser aproximada para

$$\Delta A \approx \beta A \Delta T, \;\; \text{com } \beta \equiv 2\alpha, \;\; \text{se } |\alpha \Delta T| \ll 1. \tag{295}$$

Chamamos β de *coeficiente de dilatação superficial* do material que constitui o corpo.[121] (Dica: considere, inicialmente, uma placa de forma retangular; depois, convença-se de que a aproximação em (295) se aplica a uma placa de forma qualquer - desde que ela seja homogênea e isotrópica.)

j) Pesquise a respeito de valores de α para diferentes materiais. Há sites com esses dados - especialmente para uso em engenharia. O alumínio é o metal comum com o maior coeficiente de dilatação linear: aproximadamente $24 \times 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$ - que pode ser convenientemente expresso como $0{,}024\,\mathrm{mm}/(\mathrm{m}\cdot\mathrm{K})$. Isto significa que uma barra de alumínio de comprimento igual a 1 metro, ao ser submetida a uma variação de temperatura de 1 kelvin (que corresponde a uma variação de temperatura de $1\,^{\circ}\mathrm{C}$), sofre uma dilatação de $0{,}024$ milímetros. Portanto, é necessária uma variação de temperatura de aproximadamente $40\,^{\circ}\mathrm{C}$ para que uma barra de alumínio de 1 metro sofra uma dilatação de aproximadamente 1 milímetro. E para nos certificarmos de que o uso da aproximação em (293) está correto neste caso, observe que mesmo para $\Delta T = 40\,\mathrm{K}$ temos, para o alumínio, $\alpha \Delta T \ll 1$.

Atividade 2-98: a) Seja P uma grandeza adimensional cujo valor no instante $t = 0$ é 3×10^6, e que aumenta continuamente com t de tal modo que, qualquer que seja o instante $t \geq 0$ considerado, sua taxa de variação relativa *percentual* é sempre $2\,\%$ por segundo. Temos, portanto,

$$P(0) = 3 \times 10^6 \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{100}\,\mathrm{s}^{-1} \;\; \text{para todo } t \geq 0.$$

Uma forma de interpretar esta última afirmativa é a seguinte: se, em um dado instante $t \geq 0$ (qualquer que seja), a taxa de crescimento de P se mantivesse constante, seu valor aumentaria em $2\,\%$ após 1 segundo.[122] Obtenha a função $P(t)$, e calcule $P(1\,\mathrm{s})$, $P(10\,\mathrm{s})$, $P(100\,\mathrm{s})$ e $P(500\,\mathrm{s})$ com aproximação de 3 algarismos (expresse suas respostas em milhões ou bilhões - o que for mais adequado).

b) Agora, considere que P é uma função discreta de t - mais especificamente, uma função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$ - cujo valor no instante $t = 0$ é 3×10^6, e que aumenta em $2\,\%$ a cada nova unidade de t. Trata-se de uma progressão geométrica com termo inicial 3×10^6 e razão $1{,}02$, concorda? Aqui, podemos pensar $P(t)$, por exemplo, como a população de uma determinada cidade, em função do tempo t, em anos, a partir de um “ano zero” (que pode ser o ano atual). Tal cidade possui 3 milhões de habitantes no ano $t = 0$, e sua população cresce a uma taxa constante de $2\,\%$ ao ano. Obtenha a função $P(t)$, com $t \in \mathbb{N}$. (Não atribua unidade a t, neste item; o exemplo da população foi dado apenas ilustrativamente.) Em seguida, calcule $P(1)$, $P(10)$, $P(100)$ e $P(500)$ com aproximação de 3 algarismos (expresse suas respostas em milhões ou bilhões - o que for mais adequado).

c) Compare os valores de $P(1)$, $P(10)$, $P(100)$ e $P(500)$ obtidos no item **a** - agora omitindo a unidade de tempo - respectivamente com os valores de $P(1)$, $P(10)$, $P(100)$ e $P(500)$ obtidos no item **b**. Explique por que há uma boa concordância entre os resultados obtidos nos itens **a** e **b**

[121] Perceba que podemos definir β como a taxa de variação relativa de A com respeito a T.

[122] Se $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ fosse constante, poderíamos substituí-lo por $\Delta P/\Delta t$, e daí obteríamos (verifique): $\Delta P = (\frac{2}{100}\,\mathrm{s}^{-1})P\Delta t$. Logo, com $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$ teríamos $\Delta P = \frac{2}{100}P$.

para $P(1)$ e $P(10)$, e por que essa concordância diminui para $P(100)$ e, mais ainda, para $P(500)$. (Dica: tome a razão entre a expressão para a função $P(t)$ do item **a**, omitindo a unidade de tempo, e a expressão para a função $P(t)$ do item **b**, e trabalhe com potências de mesma base.)[123]

Taxas relacionadas

A Fig. 24 mostra a trajetória de uma determinada partícula: a curva de equação

$$x = (3\,\mathrm{m}^{-1})y^2, \tag{296}$$

com o sentido indicado na própria figura. Sabendo que, no instante em que a partícula passa pelo ponto $\mathrm{P} = (3\,\mathrm{m}, 1\,\mathrm{m})$, a componente x de seu vetor velocidade é $v_x = 5\,\mathrm{m/s}$ - ou seja, nesse instante temos $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 5\,\mathrm{m/s}$ -, vamos obter, para o mesmo instante, a componente y do vetor velocidade da partícula - ou seja, $v_y = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$.

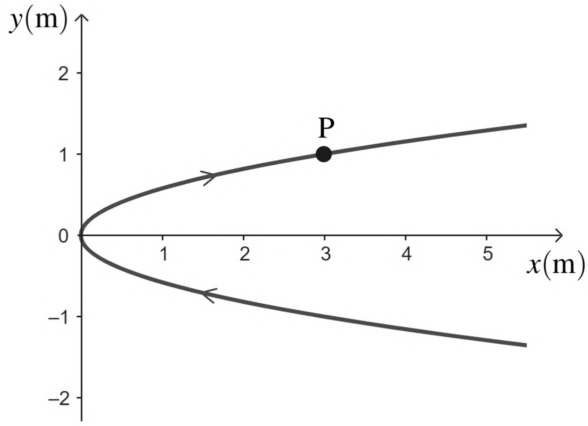


Figura 24: Trajetória de uma determinada partícula: curva de equação $x = (3\,\mathrm{m}^{-1})y^2$, com o sentido indicado. Destaque para o ponto $\mathrm{P} = (3\,\mathrm{m}, 1\,\mathrm{m})$.

O interessante, aqui, é que não conhecemos a função $y(t)$, e, mesmo assim, podemos calcular $v_y = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ com relativa facilidade, como veremos.

Diferenciando implicitamente a equação (296), em relação ao tempo, obtemos - omitindo a unidade m^{-1}, por simplicidade:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 6y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

Segue que

$$v_y = \frac{v_x}{6y},$$

ou, se você faz questão de explicitar a unidade que acompanha o coeficiente 6, deixando claro que a igualdade está dimensionalmente correta,

$$v_y = \frac{v_x}{(6\,\mathrm{m}^{-1})\,y}. \tag{297}$$

[123] Esta atividade é muito interessante para discussão em um grupo de estudantes. Um exemplo do tipo de discussão que pode ser feita: se o percentual de 2 % no enunciado fosse substituído pelo percentual de 50 %, seria esperada a boa concordância entre os resultados obtidos nos itens **a** e **b** para $P(1)$ e $P(10)$?

Temos, assim, uma expressão para v_y em termos de v_x e y. Foi dito que no instante em que a partícula passa pelo ponto $\mathrm{P} = (3\,\mathrm{m}, 1\,\mathrm{m})$, a componente x de seu vetor velocidade é $v_x = 5\,\mathrm{m/s}$. Assim, para o mesmo instante, temos:

$$v_y = \frac{5\,\mathrm{m/s}}{(6\,\mathrm{m}^{-1}) \cdot 1\,\mathrm{m}} = \frac{5}{6}\,\mathrm{m/s} \;\approx\; 0{,}83\,\mathrm{m/s}.$$

Perceba que, em (297), as *taxas* $v_y = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ e $v_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ estão *relacionadas*. Mas tal relação não foi dada *a priori*; a obtivemos diferenciando implicitamente a equação (296), em relação ao tempo. Daí, com a igualdade (297), pudemos calcular $v_y = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ a partir do conhecimento dos valores de $v_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ e y, para o instante de interesse. Bacana, não acha?

Atividade 2-99: Nesta atividade, continuaremos explorando o exemplo acima.
a) Não é surpreendente que, para uma partícula cuja trajetória no plano xy está determinada, as componentes v_x e v_y de sua velocidade estejam relacionadas. Pense um pouco a respeito. Em seguida, explique por que era esperado obtermos, para o instante em que a partícula passa pelo ponto P, na Fig. 24, v_y menor que v_x (observando que, pelo sentido indicado para a trajetória, ambos são positivos). (Dica: analise o coeficiente angular da reta tangente à trajetória no ponto P, e perceba que tal coeficiente está relacionado à razão v_y/v_x em P.)
b) Convença-se de que a relação (297), entre v_x, v_y e y, também é válida com o sentido da trajetória sendo oposto ao indicado na Fig. 24. Observe, particularmente, os sinais de v_x, v_y e y.
c) Mostre que, para a partícula cuja trajetória é mostrada na Fig. 24, v_x e v_y são determinados pelo valor do módulo da velocidade da partícula, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, e pelo valor de y. (Isso é razoável, não acha? Ou seja, é razoável que v_x e v_y sejam determinados por v e pelo ponto da trajetória em que a partícula se encontra; e para determinarmos um ponto da trajetória na Fig. 24, basta determinarmos o valor de sua ordenada y.) Mais especificamente, obtenha:

$$v_x = \frac{6yv}{\sqrt{1+36y^2}},\ \text{no SI} \quad \left(\text{ou}\quad v_x = \frac{(6\,\mathrm{m}^{-1})yv}{\sqrt{1+(36\,\mathrm{m}^{-2})y^2}},\ \text{explicitando as unidades}\right),$$

e

$$v_y = \frac{v}{\sqrt{1+36y^2}},\ \text{no SI} \quad \left(\text{ou}\quad v_y = \frac{v}{\sqrt{1+(36\,\mathrm{m}^{-2})y^2}},\ \text{explicitando as unidades}\right).$$

Convença-se de que os sinais de v_x e v_y estão corretos tanto para $y > 0$ como para $y < 0$, e também para $y = 0$.[124]
d) Agora, convença-se de que, invertendo-se o sentido do movimento, as igualdades acima devem ser modificadas, respectivamente, para

$$v_x = -\frac{6yv}{\sqrt{1+36y^2}},\ \text{no SI},$$

[124] *Nota sobre a conveniência do uso de letras para denotar constantes, em expressões matemáticas na física*: Explicitar as unidades, nas expressões acima para v_x e v_y, é um tanto incômodo, não acha? Por outro lado, omitir as unidades, escrevendo apenas algo como "no SI", ao lado dessas expressões, não nos permite realizar, de forma direta, uma verificação de que as expressões obtidas estão dimensionalmente corretas (uma verificação que devemos nos acostumar a fazer). Uma forma de nos livrarmos destas duas inconveniências é fazendo uso de uma letra para denotar a constante $3\,\mathrm{m}^{-1}$, em (296). Assim, podemos reescrever a igualdade $x = (3\,\mathrm{m}^{-1})y^2$ como $x = \alpha y^2$, com $\alpha = 3\,\mathrm{m}^{-1}$. Fica claro, da igualdade $x = \alpha y^2$, que α tem dimensão de inverso de comprimento. Muito bem, com isso, obtemos (verifique) $v_x = 2\alpha yv/\sqrt{1+4\alpha^2y^2}$ e $v_y = v/\sqrt{1+4\alpha^2y^2}$. Uma análise direta revela que estas duas igualdades estão dimensionalmente corretas. Perceba, portanto, que o uso de letras para representar valores dados - e não apenas valores constantes genéricos - pode ser vantajoso.

e
$$v_y = -\frac{v}{\sqrt{1+36y^2}}, \text{ no SI.}$$
Perceba que, tanto neste caso como no caso do item anterior, dividindo v_y por v_x obtemos (com um passo adicional) a relação expressa em (297).
e) Considerando v constante, obtenha expressões para $a_x = \mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t$ e $a_y = \mathrm{d}v_y/\mathrm{d}t$ a partir das expressões no item **c**. Em particular, quais são estas componentes cartesianas da aceleração da partícula para o instante em que ela passa pelo vértice da parábola da Fig. 24?
f) Talvez você tenha percebido que, quando a partícula passa pelo vértice da parábola da Fig. 24, a_y é sua aceleração tangencial (o que justifica o seu valor nulo, já que v é constante) e a_x é sua aceleração normal (ou centrípeta). Temos então, para tal instante (como você deve saber, de seu estudo de cinemática),
$$a_x = \frac{v^2}{R},$$
em que R é o raio da circunferência que melhor aproxima, localmente, a trajetória da partícula. Calcule o valor de R.
g) Este item é mais uma curiosidade que algo realmente importante, para o momento. Mas vale a pena, em nossa opinião. Na Parte IV desta série estudaremos, entre outras coisas, *cônicas* - ou seja, *elipses*, *hipérboles* e *parábolas*. Veremos como calcular a posição do foco de uma parábola. Você saberá mostrar, facilmente, que foco da parábola de equação $x = 3y^2$ é o ponto $(1/12, 0)$. Muito bem, no item anterior você mostrou, indiretamente, que o raio da circunferência que tangencia a parábola de equação $x = 3y^2$ em seu vértice e melhor a aproxima localmente é $R = (1/6)\mathrm{m}$. Não é coincidência que o valor de R seja o dobro da distância f do foco ao vértice da parábola - chamada de *distância focal*. A relação $R = 2f$, ou $f = R/2$, talvez lhe lembre algo sobre espelhos esféricos! Se não, não se preocupe; explicaremos tudo na Parte IV. Queremos apenas adiantar que, na óptica, fala-se sobre *foco de um espelho esférico*, mas superfícies esféricas não têm foco, assim como circunferências não possuem foco. Parábolas, sim, possuem foco. A afirmação de que " 'a distância focal' f de um espelho esférico é metade de seu raio" significa que o paraboloide de revolução (superfície gerada pela revolução de uma parábola em torno de seu próprio eixo) que é melhor aproximado, localmente, por tal espelho esférico de raio R é aquele cuja distância focal f é metade de R. Temos aqui uma conexão, talvez um pouco inusitada, entre cinemática e óptica. O que as une, neste caso, é a geometria.
h) Obtenha boas aproximações para $|v_x|$ e $|v_y|$, considerando a partícula muito distante do vértice da parábola da Fig. 24. Tais aproximações estão de acordo com sua intuição física?

Atividade 2-100: A Fig. 25 ilustra dois discos conectados por uma haste rígida de comprimento L. Cada disco está limitado a se mover sobre o eixo em que se encontra; você pode imaginá-los correndo sobre trilhos. O disco sobre o eixo x é forçado a se mover para a direita com velocidade v_x constante por um tempo (antes que tenhamos $x = L$ - sendo x a posição desse disco).
a) Calcule a taxa de variação do ângulo θ, indicado na Fig. 25, em relação ao tempo - ou seja, calcule $\dot{\theta} \equiv \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$, expressando $\dot{\theta}$ em termos de v_x, L e θ.[125] Em seguida, convença-se de que o valor de $\dot{\theta}$ para $\theta = 0$ está de acordo com o esperado (dica: lembre-se da relação entre "velocidade

[125] A notação $\dot{A}$ para a derivada de uma grandeza física A em relação ao *tempo*, e $\ddot{A}$ para a derivada segunda de A em relação ao *tempo*, é muito usada na mecânica clássica - e se aplica não só a grandezas escalares, mas também a grandezas vetoriais. Assim, temos, para uma grandeza escalar A, $\dot{A} \equiv \mathrm{d}A/\mathrm{d}t$ e $\ddot{A} \equiv \mathrm{d}^2A/\mathrm{d}t^2$; e, para uma grandeza vetorial $\mathbf{A}$, $\dot{\mathbf{A}} \equiv \mathrm{d}\mathbf{A}/\mathrm{d}t$ e $\ddot{\mathbf{A}} \equiv \mathrm{d}^2\mathbf{A}/\mathrm{d}t^2$. Por exemplo, podemos escrever a igualdade relativa à segunda lei de Newton para uma partícula de massa m das seguintes formas: $\mathbf{F}_{\mathrm{res}} = m\,\mathbf{a}$ ou $\mathbf{F}_{\mathrm{res}} = m\,\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t$ ou $\mathbf{F}_{\mathrm{res}} = m\,\dot{\mathbf{v}}$ ou $\mathbf{F}_{\mathrm{res}} = \dot{\mathbf{p}}$ (com $\mathbf{p} \equiv m\,\mathbf{v}$) ou $\mathbf{F}_{\mathrm{res}} = m\,\ddot{\mathbf{r}}$ (sendo $\mathbf{r}$ o *vetor posição* da partícula, de modo que $\mathbf{v} = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$ e $\mathbf{a} = \mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2\mathbf{r}/\mathrm{d}t^2$). A ideia é que você, como físico ou física, sinta-se confortável com todas essas formas.

linear" e "velocidade angular" - expressões comuns em livros de física do ensino médio).
b) Com o auxílio de um aplicativo como o Geogebra, considerando $v_x > 0$, esboce o gráfico de $\dot{\theta}$ em função de θ, para $0 \leq \theta < \pi/2$. Você identifica uma assíntota?[126] Discuta sua existência.
c) Calcule $\ddot{\theta} \equiv \mathrm{d}^2\theta/\mathrm{d}t^2$, expressando-o em termos de v_x, L e θ (lembre-se de que estamos considerando, nesta atividade, v_x constante). Observe que o valor de $\ddot{\theta}$ para $\theta = 0$ está de acordo com o esperado, a partir do gráfico esboçado no item **b**.

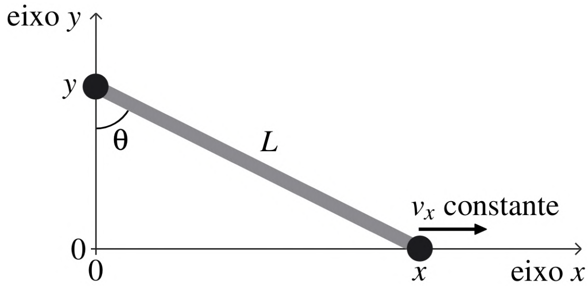


Figura 25: Atividade 2-100.

Atividade 2-101: Há muitas variações possíveis para a Atividade 2-100. Vamos explorar uma delas.
a) Partindo da relação $x^2 + y^2 = L^2$ (veja a Fig. 25), e considerando que temos sempre $y > 0$ (embora possamos ter x positivo, nulo ou negativo), obtenha:

$$v_y = -\frac{x}{\sqrt{L^2 - x^2}}\, v_x \quad (\text{considerando } y > 0). \tag{298}$$

b) Considerando os sinais possíveis para x e v_x, observe que o sinal de v_y, em (298), está sempre de acordo com o esperado, fisicamente.
c) Mostre que a igualdade (298) pode ser reescrita como (veja a Fig. 25)

$$v_y = -v_x \,\mathrm{tg}\,\theta \quad (\text{considerando } y > 0). \tag{299}$$

d) Obtenha a igualdade (299) partindo, agora, das igualdades $x = L\,\mathrm{sen}\,\theta$ e $y = L\cos\theta$.
e) Considere que o disco sobre o eixo x realiza um movimento harmônico simples descrito pela função $x(t) = A\cos\omega t$. Mostre que

$$v_y(t) = \frac{\omega A^2\,\mathrm{sen}\,2\omega t}{2\sqrt{L^2 - A^2\cos^2\omega t}}.$$

Em seguida, esboce o gráfico desta função, com o auxílio de um aplicativo como o Geogebra, para $L = 4\,\mathrm{m}$, $A = 2\,\mathrm{m}$ e $\omega = \pi\,\mathrm{s}^{-1}$. Verifique se o gráfico corresponde, grosso modo, ao esperado, fisicamente. (Perceba que não se trata de uma função senoidal, embora seu gráfico pareça com o de uma!)

Atividade 2-102: Consideremos uma partícula de massa m, restrita a se mover ao longo do eixo x. A Fig. 26 mostra um possível gráfico da energia potencial U dessa partícula, em função de sua posição x. A figura também indica, por uma linha horizontal tracejada, a energia mecânica E da partícula, suposta constante (ignore a linha horizontal tracejada inferior, por enquanto). A diferença entre E e U - indicada por um segmento vertical na figura, para um determinado

[126]Estudaremos assíntotas - verticais, horizontais e oblíquas - na Parte II-B desta série. Nesta Parte II-A, vimos assíntotas algumas vezes; releia, por exemplo, a nota de rodapé 107.

valor de x - é a energia cinética da partícula, $K = mv_x^2/2$, sendo $v_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$.[127] Como K não pode ser negativo (trata-se de uma “proibição matemática”, concorda?), a partícula transitará entre os pontos x_A e x_B da Fig. 26. À esquerda de x_A ou à direita de x_B teríamos $K = E - U$ negativo - o que não faz sentido. Dizemos então que as regiões à esquerda de x_A e à direita de x_B são *classicamente proibidas*.[128] A propósito, rigorosamente o gráfico de $U(x)$ deveria terminar nos pontos x_A e x_B; contudo, é uma prática comum na física esboçarmos o gráfico de $U(x)$ sem considerarmos o valor de E, porque isso permite visualizarmos o que ocorre ao alterarmos o valor da energia mecânica da partícula.[129] Por exemplo, se diminuirmos E para um valor $\tilde{E}$ abaixo do pico central no gráfico de $U(x)$ - ou seja, para um valor abaixo de $U(x_C)$ (veja a Fig. 26) -, a partícula não mais transitará entre x_A e x_B; estará restrita a se mover entre $x_{A'}$ e $x_{A''}$ *ou* entre $x_{B'}$ e $x_{B''}$.[130] Muito bem, imagine que em $t = 0$ a partícula com energia mecânica E está se movendo “em direção ao ponto B” - ou seja, sua posição x está aumentando, e eventualmente teremos $x = x_B$. Uma vez que tenhamos $x = x_B$, a energia cinética da partícula será nula; ela estará, naquele instante, em repouso. A questão que nos interessa, aqui, é: a partícula permanecerá em repouso, ou iniciará um movimento “de volta ao ponto A”? A ideia é não recorrermos ao conceito de força; analisaremos, apenas, a aceleração da partícula para $x = x_B$.

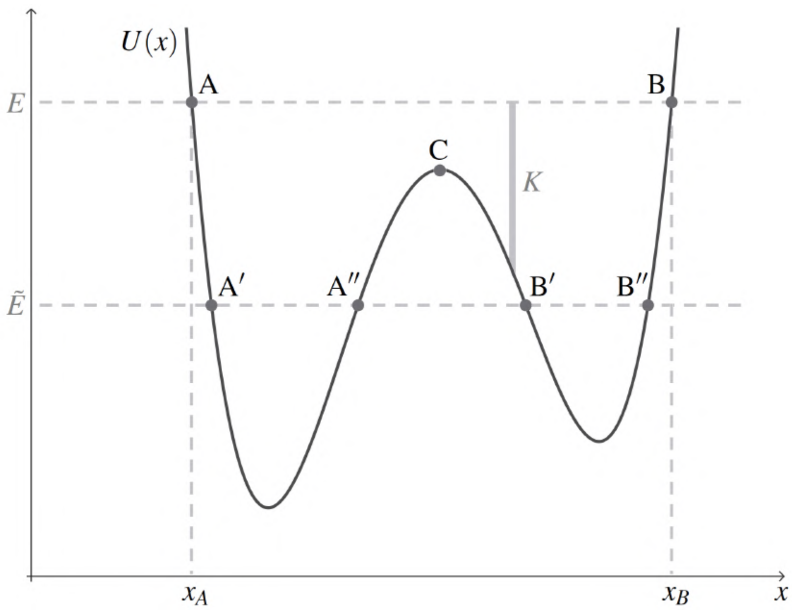


Figura 26: Atividade 2-102.

a) Derivando implicitamente, em relação ao tempo, a igualdade

$$\frac{1}{2}mv_x^2 + U(x) = E, \tag{300}$$

[127]Você deve se acostumar a visualizar a energia cinética dessa forma, em uma figura que apresenta um gráfico de energia potencial e na qual é indicada, por uma linha horizontal, a energia mecânica da partícula. Isso será útil, inclusive, em seu estudo de mecânica quântica - mais especificamente no estudo dos chamados *poços de potencial*.

[128]Eis aqui uma das previsões esquisitas - mas corretas - da mecânica quântica, proveniente da resolução da equação de Schrödinger: há uma probabilidade não nula de a partícula relativa à Fig. 26, com energia mecânica E, ser encontrada à esquerda de x_A ou à direita de x_B! É por isso que dizemos que as regiões à esquerda de x_A e à direita de x_B são, para tal partícula, *classicamente proibidas*: quanticamente, elas não são. Pesquise a respeito.

[129]Talvez você se lembre de que fizemos um comentário semelhante lá atrás: na nota de rodapé 49, relativa à Atividade 2-21.

[130]Mais uma previsão esquisita - mas correta - da mecânica quântica: há uma probabilidade não nula da partícula com energia $\tilde{E}$ “*tunelar*” da região $[x_{A'}, x_{A''}]$ para a região $[x_{B'}, x_{B''}]$, e vice-versa. Pesquise a respeito.

com E constante, obtenha a igualdade

$$v_x\left(ma_x+\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\right)=0, \tag{301}$$

válida para um instante t qualquer. Isso nos diz que se E, em (300), é constante no tempo, então necessariamente a igualdade (301) é válida para um instante t qualquer - ou seja, o produto que constitui o membro esquerdo de (301) é sempre nulo. Ora, para a partícula relativa à Fig. 26, com energia mecânica E, temos, quase sempre, $v_x \neq 0$ e, portanto,

$$ma_x+\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}=0,$$

igualdade esta que podemos reescrever como

$$a_x=-\frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}. \tag{302}$$

Estamos certos, então, de que a igualdade (302) vale para todos os instantes em que $v_x \neq 0$, concorda? Continuemos. Em (302) temos a_x como uma função de x. Mas a posição x da partícula é função de t; logo, a_x é função de t (é claro). Esperamos que a_x seja uma função de t bem comportada, certo? Então não há por que supormos que a igualdade (302) não é válida para instantes em que temos $v_x=0$; do contrário, haveria uma estranha descontinuidade em $a_x(t)$ nos instantes em que $v_x=0$. Podemos, então, confiar na validade geral da igualdade (302), se a energia mecânica E da partícula é constante.
b) Perceba, considerando a partícula relativa à Fig. 26, com energia mecânica E, que a_x - dada pela expressão em (302) - é não nula para $x=x_B$, bem como para $x=x_A$. Convença-se, então, de que a partícula não permanece em repouso em $x=x_B$, nem em $x=x_A$. Era o que queríamos mostrar! Observe, inclusive, que os sinais de a_x para $x=x_B$ e para $x=x_A$ estão de acordo com o esperado.[131]
c) Mostre que, em princípio, a partícula permaneceria em repouso em $x=x_C$, se sua energia mecânica fosse $E=U(x_C)$. Contudo, seria um caso de equilíbrio instável, porque a mínima perturbação na posição da partícula a afastaria do ponto $x=x_C$.

2.5 Derivadas básicas e regras gerais para o cálculo de derivadas: o que obtivemos até aqui

Esta subseção pode ser usada para revisão ou para consulta, quando necessário.

Vamos começar fazendo uma observação quanto à nomenclatura que estamos usando aqui - até porque ela não é universal. Estamos chamando de *regras gerais para o cálculo de derivadas* regras como a do quociente:

$$\left[\frac{u}{v}\right]=\frac{u'v-uv'}{v^2},$$

sendo u e v funções de x. Trata-se de uma regra *geral* porque ela não depende de quais são as funções $u(x)$ e $v(x)$ - desde que suas derivadas existam (e que tenhamos $v(x)\neq 0$, é claro). E

[131] Reescrevendo a igualdade (302) como $-\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}=ma_x$, e comparando-a com a componente x da igualdade $\mathbf{F}_{\mathbf{res}}=m\mathbf{a}$ (segunda lei de Newton), $F_{\mathrm{res}_x}=ma_x$, podemos concluir que $F_{\mathrm{res}_x}=-\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}$. Observe, então, que os sinais de F_{res_x} para $x=x_B$ e para $x=x_A$ estão de acordo com o esperado.

estamos chamando de *derivadas básicas* as derivadas de funções "básicas" como $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.[132] Vimos que

$$[\operatorname{sen} x]' = \cos x \quad \text{e} \quad [\cos x]' = -\operatorname{sen} x.$$

Podemos combinar estes três resultados para obter a derivada de $\operatorname{tg} x = \operatorname{sen} x \,/ \cos x$:

$$[\operatorname{tg} x]' = \left[\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right]' = \frac{[\operatorname{sen} x]' \cos x - \operatorname{sen} x [\cos x]'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

Mas ainda consideramos a derivada de $\operatorname{tg} x$ ($\sec^2 x$) uma derivada básica, porque $\operatorname{tg} x$ ainda é uma função básica, entende? Além disso, é útil termos em mente a igualdade $[\operatorname{tg} x]' = \sec^2 x$, não precisando realizar o desenvolvimento acima quando o cálculo da derivada da função tangente se fizer necessário (digamos, no meio da resolução de um problema de física).

Muito bem, as regras gerais para o cálculo de derivadas que obtivemos estão apresentadas nas Tabelas 6 e 7. Perceba que as regras na Tabela 6 nos permitem calcular derivadas de *combinações* de funções, enquanto a regra na Tabela 7 - a regra da cadeia - nos permite calcular derivadas de *composições* de funções. Mas, é claro, precisamos saber calcular derivadas de funções básicas, usadas nessas combinações e/ou composições. As Tabelas 8 a 13 apresentam derivadas básicas. Nas legendas das tabelas consta onde obtivemos os resultados apresentados (em subseções anteriores desta seção ou no primeiro texto deste projeto (Silva & Peixoto 2020)).

Recomendamos que você guarde na memória a maior parte dos resultados aqui reunidos, porque o cálculo de derivadas é algo corriqueiro na física; seria um entrave ficar consultando derivadas básicas ou regras gerais durante a resolução de problemas de física, por exemplo. Mais especificamente, recomendamos fortemente que você memorize os resultados nas Tabelas 6, 7, 8, 9 (linha superior) e 10 (coluna da esquerda);[133] e o que mais der (a memorização dos resultados na Tabela 13 é, possivelmente, a menos importante; até dispensável). É claro, há outros resultados que é útil guardar na memória; por exemplo, os resultados da seção 2.3 postos em caixas.

Atividade 2-103: Mostre que a regra do produto pode ser estendida para n funções:

$$[u_1 u_2 \cdots u_n]' = (u_1' u_2 \cdots u_n) + (u_1 u_2' \cdots u_n) + \cdots + (u_1 u_2 \cdots u_n'). \tag{303}$$

Perceba que a derivada do produto de n funções envolve n termos, e em cada um deles temos a derivada de uma, e apenas uma, das n funções. Fácil de memorizar, não acha? E pode ser útil.

[132] Na seção 2.2.1 apresentamos uma classificação geral das funções reais de uma variável real. Veja o diagrama na Fig. 2, complementado pelo diagrama na Fig. 1. Perceba que nem todas as *funções elementares* são funções básicas; podemos ter, por exemplo, *funções algébricas* bastante complicadas, bem como combinações e/ou composições complicadas de *funções elementares não algébricas* (*funções transcendentes*). Nesses casos, precisamos combinar derivadas básicas com regras gerais; mas o bom é que sempre dá certo! Ou seja, não importa quão complicada seja a expressão de uma função elementar; com o que reunimos nesta seção, podemos calcular sua derivada. Quem dera também fosse sempre possível calcular integrais de funções elementares; longe disso!

[133] Se você vem realizando todas as atividades, já deve ter memorizado - pelo uso - esses resultados.

$[cu]' = c\,u'$	(regra da homogeneidade)
$[u+v]' = u' + v'$	(regra da soma)
$[u-v]' = u' - v'$	(regra da diferença)
$[uv]' = u'v + u\,v'$	(regra do produto)
$\left[\dfrac{u}{v}\right]' = \dfrac{u'v - u\,v'}{v^2}$	(regra do quociente)

Tabela 6: Regras gerais para o cálculo de derivadas (obtidas no primeiro texto deste projeto (Silva & Peixoto 2020)). u e v são funções de x, e c é uma constante. A regra da soma pode ser estendida para um número n qualquer de funções (Silva & Peixoto 2020). A regra da diferença pode ser obtida com o uso da regra da soma e da regra da homogeneidade: $[u-v]' = [u+(-v)]' = u' + [-v]' = u' - v'$.

Seja y uma função de u, e u uma função de x. A derivada de y em relação a x ($\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$) é igual à derivada de y em relação a u ($\mathrm{d}y/\mathrm{d}u$) vezes a derivada de u em relação a x ($\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$):

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

Equivalentemente, podemos dizer que a derivada da função composta $f(g(x))$ é a derivada da *função externa* f, avaliada na *função interna* $g(x)$, multiplicada pela derivada da função interna:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x).$$

Tabela 7: Regra da cadeia (obtida, informalmente, no primeiro texto deste projeto (Silva & Peixoto 2020), e revisitada na subseção 2.2.3).

$[c]' = 0$	(derivada de uma função constante, $f(x) = c$)
$[x^s]' = s\,x^{s-1} \quad (s \in \mathbb{R}^*)$	(derivada de uma potência de base x - ou “regra da potência”)

Tabela 8: Derivada de uma função constante (Silva & Peixoto 2020) e derivada de uma potência de base x - a famosa “regra da potência” (que, é claro, não é uma “regra geral”). Demonstramos a regra da potência no primeiro texto deste projeto (Silva & Peixoto 2020), começando com expoentes inteiros positivos e indo até expoentes racionais; apenas no tópico *diferenciação logarítmica* da subseção 2.4 estendemos a regra da potência a expoentes irracionais.

$[e^x]' = e^x$	$[\ln x]' = \dfrac{1}{x} \quad (x > 0)$	$[\ln \lvert x \rvert]' = \dfrac{1}{x} \quad (x \neq 0)$
$[b^x]' = b^x \ln b$	$[\log_b x]' = \dfrac{1}{x \ln b} \quad (x > 0)$	$[\log_b \lvert x \rvert]' = \dfrac{1}{x \ln b} \quad (x \neq 0)$

Tabela 9: Derivadas de funções exponenciais e de funções logarítmicas, com destaque, na primeira linha, para o caso mais comum em que a base é o número de Euler, e. Não se preocupe em memorizar os resultados na segunda linha (com $0 < b \neq 1$); primeiro porque eles ocorrem na física com muito menor frequência que aqueles na primeira linha, e, além disso, é fácil obtê-los, a partir da primeira linha, realizando uma mudança de base (de e para b). Estas derivadas básicas foram obtidas no tópico *Derivadas e antiderivadas de funções logarítmicas e de funções exponenciais* da subseção 2.2.5 - exceto a última, que deixamos para você como uma atividade (simples).

$[\operatorname{sen} x]' = \cos x$	$[\operatorname{cossec} x]' = -\operatorname{cossec} x \ \operatorname{cotg} x$
$[\cos x]' = -\operatorname{sen} x$	$[\sec x]' = \sec x \ \operatorname{tg} x$
$[\operatorname{tg} x]' = \sec^2 x$	$[\operatorname{cotg} x]' = -\operatorname{cossec}^2 x$

Tabela 10: Derivadas das funções trigonométricas (lembrando que $\operatorname{cossec} x \equiv 1/\operatorname{sen} x$, $\sec x \equiv 1/\cos x$ e $\operatorname{cotg} x \equiv 1/\operatorname{tg} x$). Perceba que há um sinal de menos nas expressões para as derivadas das funções cujos nomes começam com “co”. Estas derivadas foram obtidas na subseção 2.2.2.

$$[\operatorname{arcsen} x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

$$[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

$$[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Tabela 11: Derivadas das três funções trigonométricas inversas mais comuns (obtidas na subseção 2.2.4). Não exploramos as outras três funções trigonométricas inversas neste texto (veja a nota de rodapé 46).

$[\text{senh}x]' = \cosh x$	$[\text{cossech}x]' = -\text{cossech}x\ \text{cotgh}x$
$[\cosh x]' = \text{senh}x$	$[\text{sech}x]' = -\text{sech}x\ \text{tgh}x$
$[\text{tgh}x]' = \text{sech}^2 x$	$[\text{cotgh}x]' = -\text{cossech}^2 x$

Tabela 12: Derivadas das funções hiperbólicas (obtidas na subseção 2.2.6). Compare com as derivadas das funções trigonométricas, na Tabela 10: a única diferença está nos sinais da segunda linha.

$$[\text{arcsenh}x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$[\text{arccosh}x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x > 1)$$

$$[\text{arctgh}x]' = \frac{1}{1-x^2} \quad (-1 < x < 1)$$

Tabela 13: Derivadas das três funções hiperbólicas inversas mais comuns (obtidas na subseção 2.2.6). As expressões para estas três funções foram obtidas na Atividade 2-62 (veja as igualdades (192), (193) e (194)). Não exploramos as outras três funções hiperbólicas inversas neste texto.

2.6 O que obtivemos, até aqui, relativamente ao cálculo de integrais

Temos trabalhado com integrais desde o primeiro texto do projeto Matemática para Física (Silva & Peixoto 2020). Lá, introduzimos o conceito de *antiderivada* ou *primitiva* na página 23, e o de *integral definida* na página 24. Mais que ser simplesmente apresentado a essas ideias, o leitor, ou a leitora, aprendeu a fazer uso delas, em aplicações concretas de interesse na física.[134] A igualdade

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \tag{304}$$

[134] É interessante observar, para fazer um contraste com nossa proposta, neste projeto, que livros típicos de cálculo diferencial e integral começam a trabalhar *integrais* bem à frente, em seu conteúdo. Por exemplo, um dos livros mais conhecidos começa, em sua oitava edição, a trabalhar antiderivadas apenas na página 278, e apresenta o teorema fundamental do cálculo apenas na página 320. Em nossa opinião, demora muito, considerando-se as necessidades imediatas de estudantes de física. Mas, é claro, não existe proposta perfeita! Cada uma delas possui vantagens e desvantagens; com a nossa não é diferente. Por isso recomendamos aos estudantes que puderem: procurem ter contato com outras exposições, com outras propostas; isso enriquecerá sua formação. Para alguns, será interessante estudar por mais de um material, em um primeiro contato com um determinado conteúdo. Para outros, será melhor estudar por um único texto, em seu primeiro contato com um certo assunto, e deixar para examinar outros textos depois. Não há regra que se aplique a todos.

relativa ao *teorema fundamental do cálculo* (TFC), foi obtida, informalmente, e usada na maioria dessas aplicações.[135] Daí pra frente, não paramos de trabalhar com integrais. Na Parte I desta série, vimos integrais múltiplas de funções reais de duas ou mais variáveis reais, e começamos a integrar vetores: primeiro considerando um vetor $\mathbf{v}$ como função de um escalar t (que pode ser *tempo*) - e então integrando $\mathbf{v}(t)\mathrm{d}t$ -, e depois passando a *integrais de linha*. Aqui na Parte II-A, começamos a trabalhar com antiderivadas já na Atividade 2-10, e com integrais definidas na Atividade 2-11. Mas ainda não estudamos, formalmente, as chamadas *técnicas de integração*; faremos isso na Parte II-B.

Como, então, temos calculado integrais? Como temos obtido antiderivadas? Você sabe a resposta: quase sempre, por inspeção.[136] É o melhor caminho quando as funções cujas antiderivadas queremos obter são muito simples - quase derivadas básicas. Por exemplo, temos, diretamente,

$$\int_{x_1}^{x_2} \cos x\, \mathrm{d}x = \operatorname{sen} x \Big|_{x_1}^{x_2} = \operatorname{sen} x_2 - \operatorname{sen} x_1 ,$$

pois $\cos x$ é uma derivada básica (de $\operatorname{sen} x$). Então é fácil obtermos, por inspeção:

$$\int_{x_1}^{x_2} A\cos(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{A}{a}\operatorname{sen}(ax+b)\Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{A}{a}\left[\operatorname{sen}(ax_2+b) - \operatorname{sen}(ax_1+b)\right].$$

Obter antiderivadas por inspeção tem sido suficiente, até aqui. Só estaremos prontos para integrais mais desafiadoras na Parte II-B desta série, onde estudaremos *técnicas de integração*. E, ainda assim, não esgotaremos esse assunto; nem será preciso, como defenderemos lá.

Nesta seção, portanto, o que cabe é a apresentação, em tabelas, de *antiderivadas básicas* - ou seja, antiderivadas de derivadas básicas -, e também de algumas propriedades gerais da integral definida (trazidas no Exercício 44 do primeiro texto (Silva & Peixoto 2020)). Vamos começar por elas: veja a Tabela 14. São propriedades intuitivas.

Passemos agora a antiderivadas básicas (apenas as mais importantes), *apresentadas no contexto do cálculo de integrais definidas*: veja as Tabelas 15 a 18. Perceba que tais antiderivadas seguem de derivadas básicas correspondentes apresentadas nas Tabelas 8 a 11, respectivamente. E, é claro, em cada caso estamos supondo que os limites de integração a e b pertencem ao domínio do integrando, e também que o integrando é contínuo no intervalo $[a,b]$ (do contrário, o TFC não se aplica[137]).

[135] Convém lembrar que o TFC inclui, além da igualdade (304), a condição de continuidade da função f no intervalo $[a,b]$. Estudaremos *continuidade de funções* mais formalmente na Parte II-B desta série, mas, grosso modo, dizemos que uma função é contínua no intervalo $[a,b]$ se seu gráfico é uma linha contínua nesse intervalo. Também convém lembrar que o TFC possui uma segunda parte, que analisaremos apenas na Parte II-B.

[136] Uma exceção aparece na Atividade 2-10: em seus itens **c** e **d** obtivemos antiderivadas difíceis de encontrar apenas por inspeção; tivemos que realizar uma "*manipulação do integrando*" - ou seja, uma manipulação algébrica de cada função cujas antiderivadas queríamos obter. Como dissemos na nota de rodapé 30, a *manipulação do integrando* é uma das três técnicas gerais de integração, que veremos na Parte II-B desta série.

[137] É interessante revisar a Atividade 2-35 - mais especificamente a discussão realizada entre os itens **c** e **d**.

$\int_a^b c f(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	(linearidade - parte 1)
$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$	(linearidade - parte 2)
$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	(inversão dos limites de integração)
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$	(adição de intervalos)

Tabela 14: Algumas propriedades básicas da integral definida.

$$\int_a^b x^s\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^{s+1}}{s+1}\right|_a^b \quad (s \neq -1) \qquad \text{(“regra da potência”)}$$

Tabela 15: Antiderivada de uma potência de base x - a famosa “regra da potência”, agora para antiderivadas. Segue imediatamente da regra da potência para derivadas. Embora a regra da potência para antiderivadas se aplique ao caso em que $s = 0$, é mais direto simplesmente escrevermos, neste caso: $\int_a^b \mathrm{d}x = b - a$.

$$\int_a^b e^x\,\mathrm{d}x = \left. e^x \right|_a^b \qquad\qquad \int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x|\Big|_a^b = \ln\frac{b}{a} \quad (a,b>0 \ \text{ ou } \ a,b<0)$$

Tabela 16: Antiderivadas de e^x e $1/x$.

$$\int_a^b \cos x \, \mathrm{d}x = \operatorname{sen} x \Big|_a^b \qquad \int_a^b \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x \, \mathrm{d}x = -\operatorname{cossec} x \Big|_a^b$$

$$\int_a^b \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = -\cos x \Big|_a^b \qquad \int_a^b \sec x \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x = \sec x \Big|_a^b$$

$$\int_a^b \sec^2 x \, \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x \Big|_a^b \qquad \int_a^b \operatorname{cossec}^2 x \, \mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x \Big|_a^b$$

Tabela 17: Antiderivadas básicas envolvendo funções trigonométricas (lembrando que $\operatorname{cossec} x \equiv 1/\operatorname{sen} x$, $\sec x \equiv 1/\cos x$ e $\operatorname{cotg} x \equiv 1/\operatorname{tg} x$). Convém observar que $\sec x \operatorname{tg} x = (\operatorname{sen} x)/(\cos^2 x)$ e $\operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x = (\cos x)/(\operatorname{sen}^2 x)$; contudo, como dissemos na nota de rodapé 29, veremos na Parte II-B desta série a técnica de *integração por substituição*, e com ela conseguiremos obter facilmente as antiderivadas de $f(x) = \sec x \operatorname{tg} x = (\operatorname{sen} x)/(\cos^2 x)$ e $f(x) = \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x = (\cos x)/(\operatorname{sen}^2 x)$ - e assim talvez você prefira não memorizá-las.

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = \operatorname{arcsen} x \Big|_a^b \quad ([a,b] \subset (-1,1))$$

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x \Big|_a^b$$

Tabela 18: Antiderivadas de $1/\sqrt{1-x^2}$ e $1/(1+x^2)$. Alternativamente, podemos expressar as antiderivadas de $1/\sqrt{1-x^2}$ como $-\arccos x + C$ (veja a Tabela 11); mas o uso da função arco seno é, em geral, preferido ao uso da função arco cosseno, aqui. Uma das razões é que a função arco seno é simétrica em relação ao 0 (mais especificamente, ela é uma função ímpar), enquanto a função arco cosseno não possui simetria semelhante.

2.7 Atividades adicionais com funções elementares: cálculos de áreas, volumes, comprimentos de curvas, obtenção da equação de uma reta tangente a um gráfico, etc.

Para esta subseção elaboramos 10 atividades - algumas delas envolvendo combinações e/ou composições de funções elementares -, organizadas da seguinte forma (é importante que você procure realizar todas elas):[138]

[138] Como você verá, a Atividade 2-107 é um tanto extensa, mas nela é desenvolvido um tópico que tem lugar garantido em praticamente todo livro de mecânica clássica, e que os estudantes de física devem conhecer bem. Vale a pena você investir tempo e energia em sua realização. E, além disso, ela é muito bacana! A Atividade 2-108 está relacionada à Atividade 2-107. Adiaremos para a Parte IV desta série o cálculo de *áreas de superfícies de revolução*;

- Cálculo de *derivadas*: Atividade 2-104;
- Cálculo de *integrais definidas*: Atividade 2-105;
- Obtenção da equação de uma *reta tangente* a um gráfico: Atividade 2-106;
- Aplicação à física: *oscilações amortecidas* (*equação diferencial*): Atividade 2-107;
- Problema de *otimização*: Atividade 2-108;
- Realização de *aproximações locais*: Atividade 2-109;
- Cálculo de *áreas de figuras planas*: Atividade 2-110;
- Cálculo de *volumes de sólidos de revolução*: Atividades 2-111 e 2-112;
- Cálculo de *comprimentos de curvas*: Atividade 2-113.

Atividade 2-104: É importante praticarmos o cálculo de derivadas de funções envolvendo combinações e/ou composições de funções elementares - independentemente de visualizarmos uma aplicação direta à física, porque esse tipo de treino é bastante útil na física. Calcule a derivada de cada uma das funções abaixo, e identifique o domínio de cada uma dessas derivadas (esta é, talvez, a parte mais difícil da atividade para os itens **b** e **e**). (Obs.: nos itens **c** e **e** você precisará fazer aplicações sucessivas da regra da cadeia.)
a) $f(x) = 3e^x + 2\,\text{arctg}\,x$ **b)** $f(x) = \dfrac{5\ln x}{\cos x}$ **c)** $f(x) = 4\,\text{sen}(2e^{3x})$
d) $f(x) = Ae^{-bx}\cos(cx+d)$, com A, b, c e d constantes.
e) $f(x) = \text{tgh}\,(\ln(\text{tg}\,x^2))$, com $x > 0$.

Atividade 2-105: Calcule as integrais definidas abaixo. (Dica: Nos itens **a** e **b**, faça uso da regra da potência, após reescrever o primeiro termo do integrando adequadamente; no tem **c**, obtenha a antiderivada por inspeção; nos itens **d** e **e**, realize uma manipulação apropriada no integrando, antes de obter as antiderivadas por inspeção.[139])

a) $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{8}{x^4} - \frac{2}{x}\right) \mathrm{d}x$ **b)** $\displaystyle\int_{-1}^{-2} \left(\frac{8}{x^4} - \frac{2}{x}\right) \mathrm{d}x$ **c)** $\displaystyle\int_0^4 xe^{-x^2}\mathrm{d}x + \int_4^2 xe^{-x^2}\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} A\,\text{sen}(nx)\cos(nx)\mathrm{d}x$, com A constante e $n \in \mathbb{N}^*$. **e)** $\displaystyle\int_{-a/2}^{a/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}},\ a > 0$

Atividade 2-106: Considere as funções $f(x) = e^{x/2}$ e $g(x) = a\,\text{sen}(\pi x) + 1$, sendo a uma constante.
a) Fazendo uso de um aplicativo como o Geogebra, esboce os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$, com $a = 1$. Em seguida, produza uma animação, fazendo a variar de -3 a 3. Perceba, com essa animação,

ele teria lugar aqui, nesta Parte II-A, mas não se trata de uma necessidade urgente para estudantes de física, em nossa opinião; preferiremos discuti-lo após o estudo de *coordenadas curvilíneas*, na Parte IV.

[139] Para o item **d**, procure uma identidade trigonométrica adequada. Quanto ao item **e**, talvez você se lembre de que já realizou uma atividade semelhante ao cálculo dessa integral: no item **c** da Atividade 2-20; mas tente calcular tal integral sem voltar à Atividade 2-20 - a menos que seja realmente necessário fazer essa revisão (cabe a você decidir).

que há um único valor de a para o qual o ponto $(0,1)$ é um *ponto de tangência* entre os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$.[140] Daí, usando o aplicativo, obtenha - visualmente ("no olhômetro", como se diz) - esse valor de a com aproximação de duas casas decimais.
b) Agora, usando cálculo diferencial, obtenha o valor exato de a que faz com que o ponto $(0,1)$ seja um *ponto de tangência* entre os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$, e compare esse valor exato com o valor aproximado obtido no item **a**.
c) Considerando o valor de a encontrado no item **b**, obtenha a equação da reta tangente aos gráficos de $f(x)$ e $g(x)$ no ponto $(0,1)$. Em seguida, esboce essa reta tangente junto com os gráficos $f(x)$ e $g(x)$, no aplicativo.

Atividade 2-107: Considere um corpo de massa m que se move apenas na direção x, e está sujeito a duas forças - ambas com a direção do eixo x: uma *força elástica, restauradora*, de componente x dada por $F_{\mathrm{el}_x} = -kx$, sendo x a posição do corpo e k uma constante positiva chamada de "*constante elástica da mola*" (talvez a mola não exista, fisicamente), e uma *força linear de resistência do ar*, também chamada de *arrasto linear* ou *arrasto viscoso*, de componente x dada por $f_x = -bv_x$, sendo v_x a componente x da velocidade do corpo - ou seja, $v_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ - e b uma constante positiva denominada *coeficiente* (ou *constante*) *de arrasto linear*, *coeficiente de arrasto viscoso*, entre outras expressões semelhantes. A força resultante sobre o corpo tem, portanto, componente x dada por

$$F_{\mathrm{res}_x} = F_{\mathrm{el}_x} + f_x = -kx - bv_x,$$

com $k > 0$ e $b > 0$.
a) Aplicando a segunda lei de Newton ao corpo (modelado como uma partícula), na forma[141]

$$a_x = \frac{F_{\mathrm{res}_x}}{m},$$

obtenha a equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \tag{305}$$

que podemos reescrever como

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{b}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}x = 0.} \tag{306}$$

Trata-se de uma equação cuja solução é o conjunto de todas as funções $x(t)$ que a satisfazem.
b) Propor uma *solução tentativa* para a Eq. (306) não é uma tarefa trivial - a menos que nos guiemos por alguma *intuição física*. É o que faremos. Aprendemos a resolver este problema para o *caso não amortecido* - ou seja, quando temos $b = 0$; revise cuidadosamente a Atividade 2-8 - incluindo as observações adicionais logo após o item **f**. Naquela atividade, obtivemos:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta), \quad \text{com } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (A \text{ e } \delta \text{ constantes}).$$

Vamos reescrever este resultado trocando "ω" por "ω_0". No contexto atual, trata-se do ω para o caso não amortecido (quando temos $b = 0$; não tem nada a ver com o instante $t = 0$, é claro; não

[140] Um *ponto de tangência* P entre os gráficos de duas funções é um ponto onde esses gráficos se tocam, sem se cruzarem. Alternativamente, podemos chamar de ponto de tangência não o ponto P, mas sua abscissa x_{P}. Neste caso, estamos pensando não em um ponto do plano xy, mas em um ponto dos domínios das funções f e g, entende?
[141] Lembre-se que $a_x = \mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t$.

se confunda). Temos, então:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \delta), \quad \text{com} \;\; \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (A \text{ e } \delta \text{ constantes}). \tag{307}$$

Muito bem, podemos intuir que, com o amortecimento gerado pelo arrasto linear, ainda teremos uma oscilação, porém *amortecida* - ou seja, de amplitude decrescente. Essa intuição pode estar errada; só saberemos testando-a. Assim, tentaremos uma solução com a forma

$$x(t) = A(t)\cos(\omega t + \delta),$$

sendo $A(t)$ uma função cujo módulo decresce com t. Precisamos, então, propor uma expressão para tal função. Não seria surpreendente escolhermos usar uma função exponencial, considerando a frequência com que funções exponenciais aparecem na física, concorda? Assim, vamos tentar:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t},$$

sendo A_0 e β constantes (é claro, "A_0" é uma notação adequada porque $A_0 = A(0)$; mas perceba que só temos $x(0) = A_0$ se δ é tal que $\cos\delta = 1$). Com isso, a solução tentativa fica:

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \delta). \tag{308}$$

Há algo que podemos antecipar. Há quatro constantes, aqui: A_0, β, ω e δ. Como a equação diferencial (306) é de segunda ordem, esperamos duas constantes arbitrárias. Portanto, se a solução tentativa acima funcionar, duas dessas quatro constantes serão determinadas, e as outras duas poderão assumir valores arbitrários, relacionados à posição inicial $x_0 \equiv x(0)$ e à velocidade inicial $v_{x_0} \equiv v_x(0)$ do corpo. Uma análise física atenta sugere que, se a solução tentativa (308) funcionar, A_0 e δ serão as constantes arbitrárias, enquanto β e ω serão determinadas pelos valores de m, k e/ou b. Pois bem, substituindo a solução tentativa (308) na Eq. (306), mostre que ela funciona, desde que tenhamos (considerando ω positivo - o que não é realmente restritivo; revise a Atividade 2-7, item **a**)[142]

$$\beta = \frac{b}{2m} \quad \text{e} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}. \tag{309}$$

Perceba que existe uma condição adicional: para que ω seja real e não nulo, devemos ter

$$\frac{k}{m} > \frac{b^2}{4m^2}, \quad \text{ou seja,} \quad b < 2\sqrt{mk}.$$

Conclusão: uma solução para a equação diferencial (306), com constantes arbitrárias e independentes A_0 e δ, é (veja as expressões para ω_0 e β respectivamente em (307) e (309))

$$x(t) = A_0 e^{-bt/2m}\cos(\omega t + \delta), \quad \text{com} \; \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \tag{310}$$

[142] Aqui vai uma dica: em seu desenvolvimento, você chegará a uma igualdade do tipo $A_1\cos(\omega t + \delta) + A_2\,\text{sen}(\omega t + \delta) = 0$, sendo A_1 e A_2 constantes; e a única forma de uma igualdade desse tipo ser válida para todo instante t é com $A_1 = 0$ e $A_2 = 0$. Podemos chegar a esta conclusão da seguinte forma (dentre outras): primeiro, considere um instante t para o qual temos, digamos, $\omega t + \delta = \pi$, e perceba que a igualdade $A_1\cos(\omega t + \delta) + A_2\,\text{sen}(\omega t + \delta) = 0$ só é satisfeita com $A_1 = 0$; em seguida, considere um instante t para o qual temos, digamos, $\omega t + \delta = \pi/2$, e perceba que a igualdade $A_1\cos(\omega t + \delta) + A_2\,\text{sen}(\omega t + \delta) = 0$ só é satisfeita com $A_2 = 0$. Portanto, repetindo, a única forma de uma igualdade do tipo $A_1\cos(\omega t + \delta) + A_2\,\text{sen}(\omega t + \delta) = 0$, sendo A_1 e A_2 constantes, ser válida para todo instante t é com $A_1 = 0$ e $A_2 = 0$. (Na linguagem da *álgebra linear*, dizemos que as funções $\cos(\omega t + \delta)$ e $\text{sen}(\omega t + \delta)$, com $\omega \neq 0$, são *linearmente independentes*.) Faça uso disso para obter os valores para β e ω em (309).

contanto que tenhamos

$$\frac{k}{m} > \frac{b^2}{4m^2}\,, \quad \text{ou seja,} \quad b < 2\sqrt{mk}. \tag{311}$$

Perceba que nossa intuição física não estava inteiramente correta: não previmos que não há oscilação, se o coeficiente de arrasto linear, b, é suficientemente grande. Ou talvez você tenha previsto isso; se sim, estamos impressionados! Faz sentido não haver oscilação se o valor de b é muito grande, não acha? Reflita um pouco. Com um arrasto muito grande, o corpo se move em direção à posição de equilíbrio, mas não passa dela - não havendo, assim, uma oscilação. Voltaremos a essa discussão mais adiante nesta atividade, e veremos como obter as soluções para a Eq. (306) no caso em que $b > 2\sqrt{mk}$ - chamado de *superamortecimento* - e no caso em que $b = 2\sqrt{mk}$ - chamado de *amortecimento crítico*; o caso acima, em que $b < 2\sqrt{mk}$, é chamado de *subamortecimento* (o único em que existe oscilação).

Vamos por em destaque a solução obtida no caso de subamortecimento:

Solução para a equação diferencial (306),
no caso de *subamortecimento* ($k/m > b^2/4m^2$ - ou seja, $b < 2\sqrt{mk}$),
com constantes arbitrárias e independentes A_0 e δ:

$$x(t) = A_0\, e^{-bt/2m} \cos(\omega t + \delta), \quad \text{com } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \tag{312}$$

$$\text{sendo} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{b}{2m}.$$

(Frequentemente estamos interessados apenas no intervalo $t \geq 0$.)

É importante observar que, com o amortecimento (e considerando $b < 2\sqrt{mk}$), a oscilação deixa de ser periódica: o movimento não mais se repete, em intervalos de tempo regulares (afinal, a amplitude decresce com o tempo). Contudo, ainda faz sentido falarmos em uma “frequência de oscilação” f, ou em uma “frequência angular” ω ($\omega = 2\pi f$): neste caso, f ainda denota, em um certo sentido, o *número de “ciclos” por unidade de tempo*, mas sem que o corpo retorne à posição e à velocidade iniciais a cada intervalo de tempo $1/f$ (observe que a cada intervalo de tempo $1/f$ o argumento do cosseno varia de 2π, completando um ciclo). É como nós, físicos, pensamos (a maioria de nós, ao menos). Adicionalmente, perceba que o valor de ω (e, portanto, de f) diminui com um aumento de b - o que faz sentido, não acha? É esperado que o amortecimento tenha efeito não apenas na amplitude, mas também na frequência; afinal, ele deixa o movimento “mais lento”. Contudo, é claro, enquanto a amplitude cai com o tempo, ω não se altera, com b constante. Há outras análises semelhantes que podemos fazer. Por exemplo, é esperado que ω aumente com k (imagine uma mola mais rígida). Já a dependência de ω com m é menos trivial. Faremos essa investigação como um exemplo de aplicação do cálculo a problemas de otimização, na Atividade 2-108.

c) Mostre que podemos reescrever a solução (312) para a equação diferencial (306), no caso de *subamortecimento* ($b < 2\sqrt{mk}$), como (revise a Atividade 2-9, se desejar):

$$x(t) = e^{-bt/2m}\left(B_1 \cos \omega t + B_2 \operatorname{sen} \omega t\right), \quad \text{com } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \tag{313}$$

sendo B_1 e B_2 constantes arbitrárias e independentes,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{b}{2m}.$$

d) Expresse B_1 e B_2, em (313), em termos de $x_0 \equiv x(0)$ e $v_{x_0} \equiv v_x(0)$, e daí reescreva (313) fazendo uso das constantes x_0 e v_{x_0}, em vez de B_1 e B_2. Observe então que as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $v_x(0) = v_{x_0}$ determinam o movimento, como esperado.[143]

e) Chegou o momento de brincarmos um pouco com o Geogebra (ou com outro aplicativo similar, se você preferir). Mas não será apenas divertido; será bastante instrutivo! Vamos começar considerando uma oscilação sem amortecimento, de amplitude $A_0 = 5\,\text{cm}$ e frequência $f_0 = 1\,\text{Hz}$, com posição inicial A_0 e, consequentemente, velocidade inicial nula. Para diferenciar o caso sem amortecimento do caso com amortecimento, vamos denotar a posição do corpo por x_{na}, no primeiro caso ("na" de não amortecido). Temos - fazendo $A_0 = 5\,\text{cm}$, $b = 0$, $\omega = \omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi\,\text{Hz}$ e $\delta = 0$ em (312):[144]

$$x_{\text{na}}(t) = (5\,\text{cm})\cos[(2\pi\,\text{s}^{-1})\,t] \quad (t \geq 0).$$

Insira esta função no Geogebra (sem as unidades, e com a restrição $t \geq 0$), e gere seu gráfico. Nada de mais até aqui, certo? Agora, vamos introduzir o amortecimento. Ou melhor, faremos isso num instante. Primeiro, desmarque a opção "Show Grid" ou "Exibir Grade" (se estiver usando o Geogebra), modifique a cor do gráfico gerado para uma cor clara (um cinza claro é uma opção interessante), e mude o estilo de linha para pontilhado. Agora sim, vamos introduzir o amortecimento. Primeiro, para mantermos as mesmas condições iniciais escolhidas para o caso sem amortecimento, faremos $x_0 = A_0 = 5\,\text{cm}$ e $v_{x_0} = 0$ na expressão para $x(t)$ obtida no item **d**. Para mantermos a frequência angular $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 2\pi\,\text{s}^{-1}$ no caso de não amortecimento, podemos escolher $m = 200\,\text{g} = 0{,}2\,\text{kg}$ e $k = 0{,}8\pi^2\,\text{N/m}$ (verifique).[145] Precisamos respeitar a condição $b < 2\sqrt{mk} = 0{,}8\pi$ kg/s $\approx 2{,}51$ kg/s (verifique). Então vamos escolher, por enquanto, $b = 0{,}5$ kg/s; isso nos dá $b/2m = 1{,}25\,\text{s}^{-1}$. Inserindo todos esses valores na expressão para $x(t)$ obtida no item **d**, temos (verifique):

$$\begin{aligned} x(t) = (5\,\text{cm})\,e^{-(1{,}25\,\text{s}^{-1})t}\Bigg[&\cos\left(\left(\sqrt{(2\pi)^2-(1{,}25)^2}\ \text{s}^{-1}\right)t\right) \\ &+\frac{1{,}25}{\sqrt{(2\pi)^2-(1{,}25)^2}}\ \text{sen}\left(\left(\sqrt{(2\pi)^2-(1{,}25)^2}\ \text{s}^{-1}\right)t\right)\Bigg] \quad (t \geq 0). \end{aligned}$$

Usando o mesmo aplicativo, esboce o gráfico desta função junto com o gráfico da função anterior ($x_{\text{na}}(t)$). Sugerimos usar uma cor azul. Por fim, vamos introduzir um terceiro gráfico na figura: o da amplitude

$$A(t) = A_0\,e^{-bt/2m} = (5\,\text{cm})\,e^{-(1{,}25\,\text{s}^{-1})t} \quad (t \geq 0).$$

Sugerimos usar uma cor vermelha, e o estilo tracejado. Concluiu? Temos uma bela figura, não acha? Continuaremos no próximo item; não feche o aplicativo (ficará ainda mais interessante).[146]

[143] Convém observar que é muito mais fácil expressar B_1 e B_2, em (313), em termos de x_0 e v_{x_0} que expressar A_0 e δ, em (312), em termos de x_0 e v_{x_0}. Isso também se aplica ao caso não amortecido, como podemos ver comparando a Atividade 2-8 com a Atividade 2-9. Não recomendamos, como atividade, expressar A_0 e δ, em (312), em termos de x_0 e v_{x_0}; as expressões resultantes não são elegantes, e o esforço envolvido não traz nenhum benefício significativo, em nossa opinião. Se tiver curioso, ou curiosa, peça a alguma *IA generativa* para fazer isso por você.

[144] Perceba que, com $b = 0$ e $\delta = 0$ em (312), obtemos $x(0) = A_0$ e $v_x(0) = 0$.

[145] É claro, na prática não se expressa o valor de k usando um número irracional (no caso, π); trata-se apenas de uma conveniência, aqui. Outra coisa: não precisaríamos ter escolhido esses valores para k e m, para obtermos $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 2\pi\,\text{s}^{-1}$; o que importa, aqui, é o valor da razão k/m, percebe?

[146] Uma observação adicional: embora, teoricamente, a oscilação amortecida continue eternamente (pois nunca temos $A(t) = 0$), na prática deixamos de ter oscilação a partir de algum instante. Que sentido haveria, por exemplo, falarmos de uma oscilação de um bloco macroscópico a partir de um instante t em que $A(t)$ é igual a, digamos, 1 nanômetro?! Observe, na figura que você construiu com o Geogebra, que podemos desconsiderar oscilações a partir de $t \approx 4\,\text{s}$.

f) Agora, vamos deixar b como um parâmetro livre para variar de 0 a seu valor máximo $2\sqrt{mk}$, que, com os valores apresentados no item anterior para k e m, é 2,51 kg/s, aproximadamente. O que precisamos fazer, no aplicativo, é trocar "1,25" (lembre-se de que com $b = 0{,}5$ kg/s e $m = 0{,}2\,\text{kg}$ obtivemos $b/2m = 1,25\,\text{s}^{-1}$) por "$b/0{,}4$", e deixar b variar de 0 a 2,51. Faça isso nas expressões para $x(t)$ e $A(t)$ inseridas no aplicativo, e então explore o que ocorre com os gráficos quando b varia de 0 a 2,51. Observe não apenas o efeito da variação de b sobre a amplitude, mas também sobre a frequência. Observe, ainda, que a oscilação praticamente inexiste quando b está próximo de seu valor máximo. (Não feche o aplicativo; voltaremos a ele daqui a alguns itens.)

g) Os próximos itens desta atividade são voltados à resolução da equação diferencial (306) para os casos $b > 2\sqrt{mk}$ (*superamortecimento*) e $b = 2\sqrt{mk}$ (*amortecimento crítico*). Geralmente, a equação (306) é resolvida, para os três casos (subamortecimento, superamortecimento e amortecimento crítico), com o uso de números complexos; e faremos isso, mas só na Parte V desta série. Por enquanto, veremos aqui um modo de resolver esse problema sem usar números complexos - o que também é muito interessante. Neste item e no próximo, prepararemos o terreno. Vamos lá. Se você leu a nota de rodapé 142, viu que a única forma de uma igualdade do tipo $A_1\cos(\omega t+\delta)+A_2\,\text{sen}(\omega t+\delta) = 0$, sendo A_1 e A_2 constantes, ser válida para todo instante t é com $A_1 = 0$ e $A_2 = 0$. E observamos que, na linguagem da *álgebra linear*, as funções $\cos(\omega t+\delta)$ e $\text{sen}(\omega t+\delta)$, com $\omega \neq 0$, são então ditas *linearmente independentes*. Vamos explorar um pouco mais o que isso significa. Duas funções são ditas linearmente independentes (LI) quando *nenhuma delas* pode ser expressa como um múltiplo da outra. Assim, por exemplo, $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$ são obviamente LI, enquanto $p(x) = x^2-2x$ e $q(x) = 3x^2-6x$ são *linearmente dependentes* (LD), pois *ao menos uma delas* pode ser expressa como um múltiplo da outra: $q(x) = 3p(x)$ e $p(x) = \frac{1}{3}q(x)$ (neste caso, ambas podem ser expressas como um múltiplo da outra). Outro exemplo de funções LD: $r(x) = x^3$ e $s(x) = 0$; embora não possamos expressar $r(x)$ como um múltiplo de $s(x)$, podemos expressar $s(x)$ como um múltiplo de $r(x)$: $s(x) = 0\,r(x)$. Se duas funções $f(x)$ e $g(x)$ são LI, a única forma de a igualdade $A_1f(x)+A_2g(x) = 0$ ser satisfeita é com $A_1 = 0$ e $A_2 = 0$; do contrário, poderíamos expressar ao menos uma delas como múltiplo da outra: ou teríamos $f(x) = -\frac{A_2}{A_1}g(x)$ (com $A_1 \neq 0$), ou então $g(x) = -\frac{A_1}{A_2}f(x)$ (com $A_2 \neq 0$). Por isso, podemos redefinir: *duas funções $f(x)$ e $g(x)$ são ditas linearmente independentes se, e somente se, a igualdade* $A_1f(x)+A_2g(x) = 0$ (para todo x pertencente aos domínios destas funções) *necessariamente implica que* $A_1 = 0$ *e* $A_2 = 0$. E esta é a definição padrão, que se estende naturalmente a três ou mais funções; mas a ideia de que duas funções são LI quando nenhuma delas pode ser expressa como um múltiplo da outra é bastante intuitiva, e por isso útil.[147] Muito bem, observe que podemos reescrever a solução (313) como:

$$x(t) = B_1e^{-bt/2m}\cos\omega t + B_2e^{-bt/2m}\,\text{sen}\,\omega t. \tag{314}$$

Trata-se de uma *combinação linear* das funções $f(t) = e^{-bt/2m}\cos\omega t$ e $g(t) = e^{-bt/2m}\,\text{sen}\,\omega t$. Mostre que estas duas funções são LI. Em seguida, perceba que se $f(t)$ e $g(t)$ fossem LD, ou seja, se pudéssemos expressar uma delas como múltiplo da outra - digamos, $g(t) = Cf(t)$ -, teríamos:

$$x(t) = B_1f(t)+B_2g(t) = B_1f(t)+B_2[Cf(t)] = (B_1+B_2C)f(t).$$

Você percebe qual seria o problema disso? Não teríamos mais duas constantes arbitrárias para satisfazer as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $v_x(0) = v_{x_0}$, mas apenas uma constante arbitrária: $D = B_1+B_2C$.[148] Assim, que as funções $f(t) = e^{-bt/2m}\cos\omega t$ e $g(t) = e^{-bt/2m}\,\text{sen}\,\omega t$, em (314),

[147] Há muito mais a ser dito sobre dependência e independência linear; faremos isso na Parte VII desta série, e também antes, na Parte V, em que estudaremos equações diferenciais de forma um pouco mais técnica.

[148] Perceba que, dada a constante C, e sendo B_1 e B_2 constantes arbitrárias, D pode assumir qualquer valor desejado,

sejam LI é fundamental para que o *problema de valor inicial* constituído pela equação (306), com $b < 2\sqrt{mk}$, e pelas condições iniciais $x(0) = x_0$ e $v_x(0) = v_{x_0}$ possa ser resolvido (e a conclusão dessa resolução consiste na determinação das constantes B_1 e B_2, em termos de x_0 e v_{x_0} - que você fez no item **d**). Guarde isso.

h) Sejam $f(t)$ e $g(t)$ duas funções linearmente independentes (não necessariamente as funções $f(t) = e^{-bt/2m}\cos\omega t$ e $g(t) = e^{-bt/2m}\,\mathrm{sen}\,\omega t$ em (314)). Mostre que se ambas satisfazem a equação diferencial (306), então uma *combinação linear* qualquer de $f(t)$ e $g(t)$, $x(t) = B_1 f(t) + B_2 g(t)$ (B_1 e B_2 constantes, adimensionais ou não - a depender das dimensões de $f(t)$ e $g(t)$), também é solução de (306).

i) Muito bem, chegou o momento de tratarmos do caso de superamortecimento ($b > 2\sqrt{mk}$), sem o uso de números complexos. No item **b**, você mostrou que a solução tentativa (308) resolve a equação diferencial (306), desde que as constantes β e ω sejam aquelas expressas em (309) - com a condição, é claro, que tenhamos $b < 2\sqrt{mk}$. Observe suas contas; em algum ponto de seu desenvolvimento, você deve ter chegado a este par de equações para β e ω:

$$\omega\left(2\beta - \frac{b}{m}\right) = 0 \quad \text{e} \quad \beta^2 - \frac{b}{m}\beta + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) = 0. \tag{315}$$

Como estávamos considerando $\omega > 0$, esta primeira equação é satisfeita com $\beta = b/2m$, e daí a segunda nos dá a expressão para ω em (309). Está tudo muito bem, mas... a matemática não impede de considerarmos, em (315), $\omega = 0$. Você pode questionar: mas por que faríamos $\omega = 0$, se com isso perderíamos o caráter oscilatório de $x(t)$ na solução tentativa (308)? Pois é: essa é a ideia! Você deve estar lembrado, por ter trabalhado no item **f**, de que a oscilação praticamente inexiste quando b está muito próximo de seu valor máximo $2\sqrt{mk}$; então não há por que esperarmos uma oscilação com $b > 2\sqrt{mk}$, certo? Portanto, vamos nos permitir, agora, fazer $\omega = 0$ nas equações (315). $\omega = 0$ resolve a primeira daquelas equações, e a segunda fica (com $\omega = 0$):

$$\beta^2 - \frac{b}{m}\beta + \frac{k}{m} = 0, \tag{316}$$

cuja solução é (verifique)[149]

$$\beta = \frac{b}{2m} + \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad \text{ou} \quad \beta = \frac{b}{2m} - \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}. \tag{317}$$

Assim, no caso em que $b > 2\sqrt{mk}$ (superamortecimento), a solução tentativa (308), com $\omega = 0$ e β dado por uma das expressões em (317), resolve a equação diferencial (306). Temos, portanto, duas soluções - uma para cada valor de β:

$$x_1(t) = A_0\, e^{-\left(\frac{b}{2m} + \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t}\cos\delta \quad \text{e} \quad x_2(t) = A_0\, e^{-\left(\frac{b}{2m} - \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t}\cos\delta.$$

Ora, o produto $A_0\cos\delta$ constitui uma única constante arbitrária, que podemos denotar por $\tilde{A}_0$. Podemos então reescrever as duas soluções acima como:

$$x_1(t) = \tilde{A}_0\, e^{-\left(\frac{b}{2m} + \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t} \quad \text{e} \quad x_2(t) = \tilde{A}_0\, e^{-\left(\frac{b}{2m} - \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t}. \tag{318}$$

através de uma escolha conveniente dos valores de B_1 e B_2. Portanto, D é realmente de uma constante arbitrária. D não seria uma constante arbitrária, sendo B_1 e B_2 constantes arbitrárias, se sua relação com C, B_1 e B_2 fosse, por exemplo, $D = B_1^2 + (B_2 C)^2$, porque neste caso não poderíamos obter valores negativos para D, dado C, quaisquer que fossem nossas escolhas para B_1 e B_2, concorda?

[149]Perceba que, nestas expressões para β, não cabe (no domínio dos números reais) $b < 2\sqrt{mk}$, porque aí teríamos $(b/2m)^2 < k/m$, e o radicando ficaria negativo.

Como estas soluções são LI - ou seja, nenhuma delas pode ser expressa como um múltiplo da outra (concorda?) -, podemos expressar a solução geral da equação diferencial (306) como uma combinação linear das mesmas - e aí surgem as duas constantes arbitrárias necessárias:

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) = \overbrace{C_1 \tilde{A}_0}^{B_1} e^{-\left(\frac{b}{2m}+\sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2-\frac{k}{m}}\right)t} + \overbrace{C_2 \tilde{A}_0}^{B_2} e^{-\left(\frac{b}{2m}-\sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2-\frac{k}{m}}\right)t}.$$

Tradicionalmente, a letra "β" é usada para denotar $b/2m$ - mesmo nos casos de superamortecimento e amortecimento crítico. Assim, podemos reescrever a solução acima como (lembrando que $\omega_0 = \sqrt{k/m}$):

$$\begin{aligned} x(t) &= B_1 e^{-\left(\frac{b}{2m}+\sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2-\frac{k}{m}}\right)t} + B_2 e^{-\left(\frac{b}{2m}-\sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2-\frac{k}{m}}\right)t} \\ &= B_1 e^{-\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right)t} + B_2 e^{-\left(\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right)t}, \end{aligned}$$

agora com $\beta = b/2m$. Maravilha, não acha?!

Vamos por em destaque a solução obtida no caso de superamortecimento:

> Solução para a equação diferencial (306),
> no caso de *superamortecimento* ($b > 2\sqrt{mk}$),
> com constantes arbitrárias e independentes B_1 e B_2:
>
> $$x(t) = B_1 e^{-\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right)t} + B_2 e^{-\left(\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right)t}, \tag{319}$$
>
> $$\text{sendo} \quad \beta = \frac{b}{2m} \quad \text{e} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$
>
> (Frequentemente estamos interessados apenas no intervalo $t \geq 0$.)

j) Talvez você olhe para a solução em (319) com certa desconfiança. Talvez se pergunte: será que se trata, realmente, de uma solução para a equação diferencial (306)? Bem, podemos testar! Substitua (319) em (306), e mostre que esta última igualdade é satisfeita. (Dica: devido ao que você mostrou no item **h**, basta mostrar que as funções

$$e^{-\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right)t} \quad \text{e} \quad e^{-\left(\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right)t},$$

com $\beta = b/2m$ e $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, satisfazem a equação diferencial (306). Se preferir, faça isso de uma só vez, trabalhando com a expressão

$$e^{-\left(\beta\pm\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right)t}.)$$

k) Outro caminho possível para resolvermos a equação diferencial (306), no caso de superamortecimento, é de cara propormos a solução tentativa

$$x(t) = B_0 e^{-\gamma t}, \tag{320}$$

com B_0 e γ constantes. Qual seria a motivação física para tal solução tentativa? Simples: a ideia de que, se o coeficiente de arrasto linear b é muito grande, o corpo não oscila; apenas se move em direção à posição de equilíbrio. E o uso de uma função exponencial é uma boa escolha, considerando-se a frequência com que tais funções aparecem na física (é claro, estamos aqui fazendo de conta que você não conhece a solução em (319); ou seja, estamos no "espírito de redescoberta"). Mas temos um problema: o valor de γ deve ser determinado pelos valores de b, m e k (é intuitivo que os valores desses parâmetros devem determinar a forma como o corpo se move em direção à posição de equilíbrio); então só temos uma constante arbitrária para satisfazer as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $v_x(0) = v_{x_0}$: a constante B_0. Ou seja, a solução tentativa acima em princípio pode resolver a equação diferencial (306), mas não o problema de valor inicial que é constituído, adicionalmente, por essas condições iniciais. Contudo, não vamos tentar melhorar a solução tentativa em (320); em vez disso, vejamos se obtemos duas funções linearmente independentes, para expressarmos a solução geral como uma combinação linear das mesmas. Substitua (320) em (306), e mostre que tal solução tentativa funciona, desde que tenhamos

$$\gamma = \frac{b}{2m} + \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \qquad \text{ou} \qquad \gamma = \frac{b}{2m} - \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}, \tag{321}$$

e, é claro (trabalhando no domínio dos reais),

$$\frac{b^2}{4m^2} \geq \frac{k}{m}\,, \quad \text{ou seja,} \quad b \geq 2\sqrt{mk}. \tag{322}$$

Mas apenas com $b > 2\sqrt{mk}$ (em vez de $b \geq 2\sqrt{mk}$) temos *duas* soluções - uma para cada valor de γ:

$$x_1(t) = B_0\, e^{-\left(\frac{b}{2m}+\sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2-\frac{k}{m}}\right)t} \qquad \text{e} \qquad x_2(t) = B_0\, e^{-\left(\frac{b}{2m}-\sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2-\frac{k}{m}}\right)t}. \tag{323}$$

Como estas soluções são LI - ou seja, nenhuma delas pode ser expressa como um múltiplo da outra (concorda?) -, podemos expressar a solução geral da equação diferencial (306) como uma combinação linear das mesmas - e aí surgem as duas constantes arbitrárias necessárias (para o problema de valor inicial):

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) = \overbrace{C_1 B_0}^{B_1}\, e^{-\left(\frac{b}{2m}+\sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2-\frac{k}{m}}\right)t} + \overbrace{C_2 B_0}^{B_2}\, e^{-\left(\frac{b}{2m}-\sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2-\frac{k}{m}}\right)t},$$

reproduzindo o resultado em (319). Vamos fazer uma observação adicional, antes de passarmos ao próximo item. Veremos na Parte V que, com o uso de números complexos, a solução em (319) dá conta também do caso de subamortecimento! Isso tem a ver com a *fórmula de Euler* (que comentamos na nota de rodapé 11): $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$, em que θ é um número real e i é a *unidade imaginária*, que satisfaz a igualdade $i^2 = -1$. Essa fórmula nos diz - surpreendentemente - que com o uso de números complexos podemos relacionar funções exponenciais (complexas) e funções trigonométricas (reais).

l) É importante observar que temos, em (319), *uma combinação linear de duas exponenciais decrescentes*; *ambas tendem a zero quando* $t \to \infty$, e, portanto, $x(t)$ tende a zero quando $t \to \infty$, como esperado.[150] Para provar que as duas exponenciais em (319) são realmente decrescentes, mostre que, com $t > 0$, ambos os expoentes são negativos. Em seguida, responda: qual das duas exponenciais tende a zero *mais lentamente* que a outra?

[150] Mas atenção: uma combinação linear de duas funções decrescentes não necessariamente é uma função decrescente. Um exemplo trivial: $f(x) = -x$ e $g(x) = -2x$ são funções decrescentes, mas $h(x) = -3f(x) - 2g(x) = 3x + 4x = 7x$ é uma função crescente. Outro exemplo, agora com exponenciais: $f(x) = e^{-x}$ e $g(x) = e^{-2x}$ são funções decrescentes, mas $h(x) = f(x) - g(x) = e^{-x} - e^{-2x}$ é uma função crescente no intervalo $(-\infty, \ln 2]$, como você pode verificar. Contudo, porque $f(x) = e^{-x}$ e $g(x) = e^{-2x}$ tendem a zero quando $x \to \infty$, qualquer combinação linear destas duas funções tende a zero quando $x \to \infty$.

m) Reescreva a solução (319) em termos de $x_0 \equiv x(0)$ e $v_{x_0} \equiv v_x(0)$.

n) Voltemos ao Geogebra (ou ao aplicativo de sua escolha). Fizemos uso dele nos itens **e** e **f** (releia-os, se necessário). Continuaremos do ponto em que deixamos o aplicativo no item **f**. Consideraremos, aqui, o mesmo corpo de massa $m = 0{,}2\,\text{kg}$, a mesma mola de constante elástica $k = 0{,}8\pi^2\,\text{N/m}$ (o que nos dá $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 2\pi\,\text{s}^{-1}$), e as mesmas condições iniciais: $x_0 = 5\,\text{cm}$ e $v_{x_0} = 0$. Mas, agora, faremos b variar não de 0 a seu valor máximo - considerando-se o regime de subamortecimento -, que é aproximadamente 2,51 kg/s, e sim de 0 a 5 kg/s. Insira, no aplicativo, a expressão para $x(t)$ obtida no item **m**, com os valores para m, k, x_0 e v_{x_0} acima, e deixando b como um parâmetro livre para variar de 0 a 5 kg/s. No Geogebra, ao darmos início à animação, com b variando de 0 a 5 kg/s, ocorre o seguinte: na faixa $0 \leq b \lesssim 2{,}51$ kg/s, apenas o gráfico de $x(t)$ para o regime de subamortecimento é esboçado (um gráfico para cada valor de b nessa faixa), enquanto na faixa $2{,}51$ kg/s $\lesssim b \leq 5$ kg/s, apenas o gráfico de $x(t)$ para o regime de superamortecimento é esboçado (um gráfico para cada valor de b nessa nova faixa). Isso ocorre porque, no regime de subamortecimento, a função $x(t)$ para o caso de superamortecimento envolve raízes de números negativos, e, assim, o Geogebra não esboça gráfico algum para tal função; e no regime de superamortecimento, a função $x(t)$ para o caso de subamortecimento envolve raízes de números negativos, e, assim, o Geogebra não esboça nenhum gráfico para tal função. Ele poderia emitir alguma mensagem de erro, ao tentar calcular essas raízes de números negativos, mas, felizmente (para nós, aqui), isso não ocorre. A animação produzida é muito bonita, e mostra uma transição suave do regime de subamortecimento para o de superamortecimento. Para que tal transição fique mais clara, sugerimos que você escolha cores diferentes para os gráficos de $x(t)$ nos dois regimes. (Obs.: dará um trabalhinho escrever a expressão para $x(t)$ no caso de superamortecimento, mas vale a pena! Tenha o cuidado de checar bem a expressão inserida no aplicativo.)

o) É interessante observar que, no caso de superamortecimento, existe um modo de o corpo cruzar a posição de equilíbrio (o que pode parecer surpreendente, à primeira vista, já que no regime de superamortecimento de fato não existe oscilação): basta que seja dada a ele uma velocidade inicial suficientemente grande, em módulo, em direção à posição de equilíbrio. É o que exploraremos neste item. Vamos continuar considerando um corpo de massa $m = 0{,}2\,\text{kg}$ e uma mola de constante elástica $k = 0{,}8\pi^2\,\text{N/m}$ (o que nos dá $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 2\pi\,\text{s}^{-1}$). Vamos escolher $b = 3$ kg/s (apenas um pouco acima do valor crítico de aproximadamente 2,51 kg/s), e as condições iniciais $x_0 = 5\,\text{cm}$ (esta mantida) e $v_{x_0} = -100\,\text{cm/s}$ (agora estamos lançando o corpo em direção à posição de equilíbrio, $x = 0$). Trabalhando com esses valores, esboce o gráfico (com o Geogebra ou outro aplicativo similar) de $x(t)$, fazendo uso da expressão obtida no item **m**. Você obterá a curva preta mostrada na Fig. 27. Nessa figura, a curva cinza contínua é o gráfico correspondente de $x(t)$, com os valores escolhidos acima para m, k, b e x_0, mas com $v_{x_0} = 0$ (neste caso, o corpo não cruza a posição de equilíbrio); e a curva cinza pontilhada é o gráfico de $x(t)$, com $v_{x_0} = 0$, mas sem amortecimento - ou seja, com $b = 0$. Uma bela figura, não acha? Ficamos tentados a por aqui outras figuras, relativas aos casos de subamortecimento e superamortecimento (explorando, inclusive, a transição suave entre os gráficos de $x(t)$, quando b cruza o valor crítico de aproximadamente 2,51 kg/s), mas achamos que você deve produzir essas figuras por si mesmo, ou por si mesma. Após isso, você pode guardá-las (salvá-las, imprimi-las, ...), para consultas futuras.

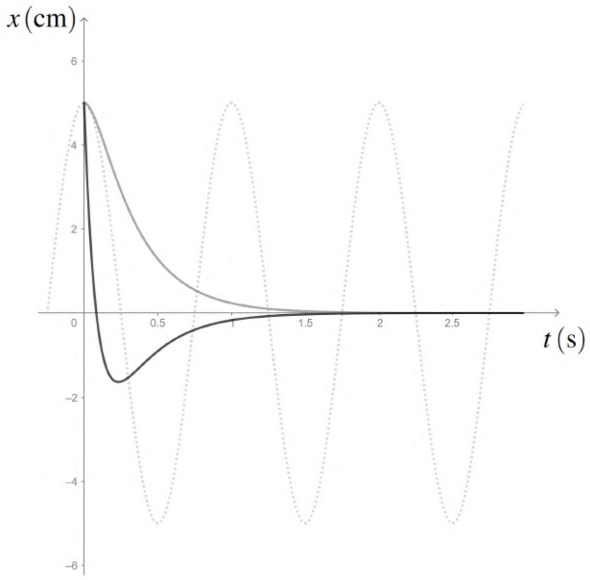


Figura 27: Atividade 2-107, item **o**.

p) Tratemos agora do caso de amortecimento crítico ($b = 2\sqrt{mk}$). Em primeiro lugar, precisamos entender que a cada medida do coeficiente de arrasto linear b há um erro associado - ou seja, não é possível conhecermos o valor de b com exatidão (e isso não se aplica apenas a esta grandeza física, é claro). Assim, o caso de amortecimento crítico, em que b é *exatamente igual* a $2\sqrt{mk}$, é uma idealização, já que, na prática, não conseguiremos satisfazer, exatamente, tal igualdade, entende? Podemos ter liberdade de alterar os valores de b, m e k, no experimento, mas haverá sempre uma incerteza no valor de b, e também no valor de $2\sqrt{mk}$. Poderíamos, então, trabalhar com a solução geral para o caso de superamortecimento, tomando para b um valor apenas ligeiramente superior ao valor crítico $2\sqrt{mk}$. Contudo, a solução matemática exata para a equação diferencial (306), no caso de amortecimento crítico, é de interesse teórico; e também é de interesse prático, no final das contas, porque, como veremos, a expressão para $x(t)$ no caso de amortecimento crítico é mais simples que a expressão para $x(t)$ no caso de superamortecimento. A dificuldade é que, com $b = 2\sqrt{mk}$, as soluções linearmente independentes $x_1(t)$ e $x_2(t)$ em (318) (ou em (323)) ficam iguais:

$$x_1(t) = x_2(t) = \tilde{A}_0\, e^{-bt/2m}.$$

E precisamos de duas soluções LI, para termos as duas constantes arbitrárias que permitirão a solução do problema de valor inicial constituído pela equação diferencial (306) e pelas condições iniciais $x(0) = x_0$ e $v_x(0) = v_{x_0}$. Vamos então manter (trocando $\tilde{A}_0$ por A_1)

$$x_1(t) = A_1\, e^{-bt/2m}$$

e procurar uma segunda função $x_2(t)$ que satisfaça a equação diferencial (306) e seja linearmente independente de $x_1(t)$. Como? Este é o desafio! Mas temos uma pista de como resolvê-lo. Nas animações que realizamos, vimos que a transição do regime de subamortecimento para o regime de superamortecimento é *suave* (dizendo, assim, informalmente); então faz sentido buscarmos uma aproximação para $x(t)$, no caso de superamortecimento, considerando b apenas um pouquinho acima do valor crítico $2\sqrt{mk}$. Isso poderá nos dar uma pista para $x_2(t)$. Vejamos... Primeiro, vamos reescrever a solução geral (319), no caso de superamortecimento, da seguinte forma:

$$x(t) = e^{-\beta t}\left(B_1\, e^{-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\; t} + B_2\, e^{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\; t}\right).$$

Com b apenas ligeiramente superior ao valor crítico $2\sqrt{mk}$, temos β^2 apenas ligeiramente superior a ω_0^2. Se tivermos $0 < \sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\ t \ll 1$ (perceba que, mesmo que o valor de t seja grande, podemos sempre fazer β^2 suficientemente próximo de ω_0^2 para obtermos $\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\ t \ll 1$), poderemos usar a aproximação (veja (222))

$$e^x \approx 1+x \quad (\text{para } |x| \ll 1)$$

para obter

$$e^{-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\ t} \approx 1-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\ t \qquad \text{e} \qquad e^{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\ t} \approx 1+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\ t,$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} x(t) &\approx e^{-\beta t}\left[B_1\left(1-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\ t\right)+B_2\left(1+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\ t\right)\right] \\ &= e^{-\beta t}\Big[\underbrace{(B_1+B_2)}_{\tilde{B}_1}+\underbrace{(B_2-B_1)\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}}_{\tilde{B}_2}\ t\Big] \\ &= \tilde{B}_1 e^{-bt/2m}+\tilde{B}_2 t\, e^{-bt/2m}, \end{aligned} \tag{324}$$

sendo $\tilde{B}_1$ e $\tilde{B}_2$ duas constantes arbitrárias.[151] Muito bem, temos em (324) uma solução aproximada para a equação diferencial (306), no caso de superamortecimento, e a aproximação é boa, em um dado intervalo $0 \le t < \tau$, apenas se o valor de b ($> 2\sqrt{mk}$) é suficientemente próximo do valor crítico $2\sqrt{mk}$ para que tenhamos, nesse intervalo, $0 < \sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\ t \ll 1$ (ou seja, para que tenhamos $0 < \sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\ \tau \ll 1$). Mas o que importa, aqui, é que essa solução aproximada nos dá a *sugestão* que estamos buscando para a função $x_2(t)$, linearmente independente de $x_1(t)$:

$$x_2(t) = A_2 t\, e^{-bt/2m},$$

percebe?! (Lembre-se da ideia de transição suave do regime de subamortecimento para o regime de superamortecimento, quando b cruza o valor crítico $2\sqrt{mk}$.) Com isso, temos a seguinte solução tentativa para a equação diferencial (306), no caso de amortecimento crítico:

$$x(t) = C_1x_1(t)+C_2x_2(t) = \overbrace{C_1A_1}^{D_1} e^{-bt/2m}+\overbrace{C_2A_2}^{D_2}\ t\, e^{-bt/2m} = D_1\, e^{-bt/2m}+D_2\ t\, e^{-bt/2m},$$

sendo D_1 e D_2 duas constantes arbitrárias. Por uma preferência estética, vamos usar "B_1" e "B_2" no lugar de "D_1" e "D_2", respectivamente (não correndo o risco de confusão com o "B_1" e o "B_2" anteriores, já que se trata de constantes arbitrárias). Temos, então, a seguinte solução tentativa para a equação diferencial (306), no caso de amortecimento crítico:

$$x(t) = B_1\, e^{-bt/2m}+B_2\, t\, e^{-bt/2m},$$

sendo B_1 e B_2 duas constantes arbitrárias. Mostre que esta solução tentativa funciona; e deixe claro qual é a condição para que ela funcione. (Dica: como as funções $e^{-bt/2m}$ e $t\, e^{-bt/2m}$ são

[151] Perceba que podemos obter quaisquer valores desejados para $\tilde{B}_1$ e $\tilde{B}_2$, pela escolha adequada dos valores de B_1 e B_2 (lembrando que, no desenvolvimento acima, estamos considerando β^2 superior a ω_0^2, mesmo que apenas ligeiramente). Você pode facilmente mostrar que os valores a serem escolhidos para B_1 e B_2 são: $B_1 = \frac{\tilde{B}_1}{2} - \frac{\tilde{B}_2}{2\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}}$ e $B_2 = \frac{\tilde{B}_1}{2} + \frac{\tilde{B}_2}{2\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}}$.

LI (concorda?), basta mostrar que cada uma delas resolve a equação diferencial (306), sob uma determinada condição. Na verdade, basta mostrar que $t\,e^{-bt/2m}$ resolve a equação diferencial (306), sob uma determinada condição, porque já vimos que $x_1(t) = A_1 e^{-bt/2m}$ é solução da equação diferencial (306), com $b = 2\sqrt{mk}$.)

Vamos por em destaque a solução obtida no caso de amortecimento crítico:

Solução para a equação diferencial (306),
no caso de *amortecimento crítico* ($b = 2\sqrt{mk}$),
com constantes arbitrárias e independentes B_1 e B_2:

$$x(t) = (B_1 + B_2 t)e^{-bt/2m}. \tag{325}$$

(Frequentemente estamos interessados apenas no intervalo $t \geq 0$.)

q) Reescreva a solução (325) em termos de $x_0 \equiv x(0)$ e $v_{x0} \equiv v_x(0)$.

r) Na animação realizada com o Geogebra (ou outro aplicativo) em que há a transição do regime de subamortecimento para o regime de superamortecimento, acrescente o gráfico de $x(t)$ para caso de amortecimento crítico, com $m = 0{,}2\,\text{kg}$, $b = 0{,}8\pi\,\text{kg/s}$, $x_0 = 5\,\text{cm}$ e $v_{x0} = 0$. Verifique que tal gráfico ocupa o espaço esperado, na animação.

s) Um último item, antes de encerrarmos esta atividade. Se a transição do regime de subamortecimento para o regime de superamortecimento é realmente suave (e a animação realizada - da última vez no item **r** - indica que é), então a solução para o problema de valor inicial constituído pela equação diferencial (306) e pelas condições iniciais $x(0) = x_0$ e $v_x(0) = v_{x0}$, no caso de amortecimento crítico - que, obviamente, é uma solução exata se $b = 2\sqrt{mk}$ -, deve ser uma ótima aproximação não só para o caso de superamortecimento, se b ($> 2\sqrt{mk}$) é suficientemente próximo do valor crítico $2\sqrt{mk}$, mas também para o caso de subamortecimento, se b ($< 2\sqrt{mk}$) é suficientemente próximo do valor crítico $2\sqrt{mk}$. Verifique isso, a partir da expressão para $x(t)$ obtida no item **d**.

Atividade 2-108: A frequência angular de um sistema massa-mola sem amortecimento é

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,,$$

em que k é a constante elástica da mola e m é a massa do corpo. Observe que, fixando o valor de k, a frequência angular ω_0 da oscilação diminui com o aumento de m. Isso é intuitivo, porque a massa do corpo é uma medida de sua inércia - ou seja, de sua resistência a alterações em seu estado de movimento: quanto maior a inércia, menor o número de ciclos por unidade de tempo. Pois bem, no caso de um sistema massa-mola subamortecido, a frequência angular da oscilação é

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}\,,$$

sendo k a constante elástica da mola, m a massa do corpo e b o coeficiente de arrasto linear. Nesse sistema, a relação entre a frequência angular ω e a massa m do corpo, com k e b fixos, é menos óbvia.[152] À primeira vista, poderíamos dizer: como m está nos denominadores das

[152] A relação entre ω e k, com b e m fixos, é simples e intuitiva: quanto maior o valor de k - ou seja, quanto mais rígida a mola -, maior o valor de ω, como esperado. A relação entre ω e b, com k e m fixos, também é simples e intuitiva: quanto maior o valor de b - ou seja, quanto maior o arrasto, para uma dada velocidade -, menor o valor de ω, como esperado. É claro, neste caso b não deve ultrapassar o valor crítico $2\sqrt{mk}$.

duas frações, ω diminui com o aumento de m. Mas não é tão simples assim, porque temos, no radicando da igualdade acima, uma *diferença* de frações. Deixemos a matemática de lado, por um momento, e façamos uma análise física. Por um lado, um aumento no valor de m significa um aumento da inércia do corpo, e, portanto, um aumento de sua resistência a alterações em seu estado de movimento; então, considerando apenas esse aspecto, ω deveria diminuir com o aumento de m, e *aumentar com a diminuição de m*: *menos massa, menos inércia, mais ciclos por unidade de tempo*. Mas, por outro lado, o efeito do arrasto sobre corpos de pequena massa é bem maior que sobre corpos mais pesados de forma e dimensões semelhantes,[153] e assim, considerando apenas esse aspecto, ω deveria *diminuir com a diminuição de m*: *menos massa, efeito mais pronunciado da resistência do ar, menos ciclos por unidade de tempo*. Temos, então, dois "efeitos competitivos" da diminuição da massa m do corpo, percebe? Podemos imaginar que, começando com um valor elevado de m, o efeito da inércia predomina, e então ω aumenta quando m diminui. Continuando a diminuir o valor de m, o efeito da resistência do ar (do arrasto) passa a ser cada vez mais pronunciado, e então, a partir de um certo ponto, tal efeito predomina, e o valor de ω começa a diminuir (com a diminuição do valor de m). Portanto, deve haver um "valor ótimo" de m, que denotaremos por $m_{\text{ótimo}}$, que faz com que ω seja máximo, para os valores correntes de k e b.

a) Para testar essa ideia, usando um aplicativo esboce o gráfico de ω como função de m, com $k = 0{,}8\pi^2\,\text{N/m}$ (valor usado no item **e** da Atividade 2-107) e $b = 0{,}8\pi\,\text{kg/s}$ (valor também usado no item **e** da Atividade 2-107, que corresponde ao valor crítico $2\sqrt{mk}$ para uma massa de $0{,}2\,\text{kg}$). Você obterá uma figura semelhante à Fig. 28. De fato, há um valor máximo para ω. Verifique, usando recursos do aplicativo, que esse valor máximo de ω ocorre para $m = 0{,}4\,\text{kg}$. (Tendo realizado esta tarefa, perceba que não podemos garantir que este valor é exato, porque não se trata de um cálculo analítico; mas, no mínimo, é uma ótima aproximação. Tenha isso em mente, ao discutir valores obtidos com recursos numéricos de um aplicativo como o Geogebra.)

b) Vamos mostrar que não se trata de uma coincidência: independentemente dos valores de k e b, há sempre um valor ótimo de m, $m_{\text{ótimo}}$, que leva a um valor máximo de ω. Por enquanto, derive ω em relação a m (considerando k e b fixos),[154] e mostre que há um único valor de m que torna nula essa derivada. Tal valor é o $m_{\text{ótimo}}$ - faltando apenas confirmar que o ponto do gráfico de abscissa $m_{\text{ótimo}}$ é, de fato, um ponto de máximo (o que você fará no item **d**). Em seguida, apenas como um teste, verifique se $m_{\text{ótimo}} = 0{,}4\,\text{kg}$, exatamente, com $k = 0{,}8\pi^2\,\text{N/m}$ e $b = 0{,}8\pi\,\text{kg/s}$. (Revise, se necessário, a seção "Problemas envolvendo mínimos ou máximos locais" do primeiro texto deste projeto (Silva & Peixoto 2020).)

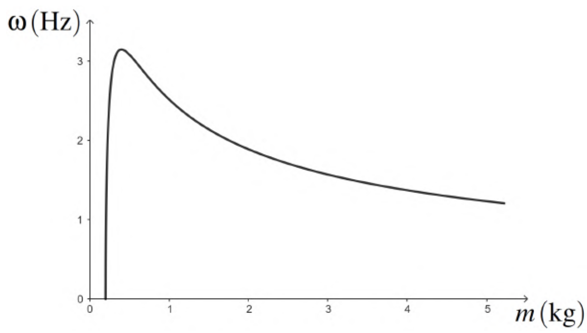


Figura 28: Atividade 2-108, item **a**.

[153]Isso fica evidente, por exemplo, quando arremessamos com a mesma velocidade inicial uma pedra e uma bolinha de isopor de dimensões semelhantes: a diferença entre seus alcances é enorme!

[154]Se quiser, use a notação para *derivadas parciais* - que vimos no início da Parte I (Peixoto *et al.* 2023); mas isso não é necessário.

c) Perceba, na Fig. 28, que não existe ω para m menor que um certo valor. Usando recursos do aplicativo, mostre que tal valor é 0,2 kg. É claro, trata-se do valor de m que anula o radicando na expressão para ω. Mostre que esse valor é $m = b^2/4k$ (que dá 0,2 kg, exatamente, com $k = 0{,}8\pi^2$ N/m e $b = 0{,}8\pi$ kg/s). Se você realizou a Atividade 2-107, reconhece que esta relação entre m, b e k - que pode ser reescrita como $b = 2\sqrt{mk}$ - corresponde ao caso de *amortecimento crítico* do sistema massa-mola. Podemos dizer que, dados m e k, a igualdade $b = 2\sqrt{mk}$ nos dá o valor de b que produz o estado de amortecimento crítico. Também podemos dizer que, dados k e b, a igualdade $m = b^2/4k$ nos dá o valor de m que produz o estado de amortecimento crítico. Denotemos tal "valor crítico" de m por $m_{\text{crítico}}$. Temos, então,

$$m_{\text{crítico}} = \frac{b^2}{4k}. \tag{326}$$

Mostre que

$$m_{\text{ótimo}} = 2\,m_{\text{crítico}}\,, \tag{327}$$

e que

$$\omega_{\text{máximo}} = \omega(m_{\text{ótimo}}) = \frac{k}{b}. \tag{328}$$

d) Mostre que a derivada segunda de ω em relação a m é negativa para $m = m_{\text{ótimo}}$ - confirmando que o ponto do gráfico de abscissa $m_{\text{ótimo}}$ é, de fato, um ponto de máximo. (Não se assuste com as contas, que são um pouquinho trabalhosas; trata-se de um bom treino. Mas não faça mais contas que o necessário, pois a ideia não é obter a derivada segunda como um todo, mas apenas seu sinal, para $m = m_{\text{crítico}}$.)

e) *À primeira vista, o resultado expresso em (327), que leva ao resultado em (328), é de interesse prático, se desejamos maximizar a frequência de uma oscilação amortecida*, com a constante elástica k da mola e a constante de arrasto linear b fixas. Contudo, devemos lembrar que m afeta não só a frequência, mas também a rapidez com que a exponencial $e^{-bt/2m}$ tende a zero, e, portanto, afeta a amplitude (variável) da oscilação: perceba que quanto menor o valor de m, maior o valor da constante $b/2m$ e, portanto, mais rapidamente $e^{-bt/2m}$ e a amplitude da oscilação tendem a zero. E $m_{\text{ótimo}}$ é apenas o dobro de $m_{\text{crítico}}$ (pense em termos físicos, não em termos matemáticos); ou seja, o valor de m que maximiza ω está muito próximo do valor de m que leva ao estado de amortecimento crítico, no qual não há oscilação. Então, *na prática, não faz muito sentido fazermos* $m = m_{ótimo} = 2\,m_{crítico}$ *para maximizarmos a frequência da oscilação* (supondo que isso seja de interesse) *se, com isso, quase não há oscilação*, entende? Veja como algumas coisas são intricadas, mesmo na física básica! Física exige paciência! Reflita um pouco sobre tudo isso; continuaremos a análise no próximo item.

f) Voltemos à afirmativa em itálico na parte final do último item: *na prática, não faz muito sentido fazermos* $m = m_{ótimo} = 2\,m_{crítico}$ *para maximizarmos a frequência da oscilação se, com isso, quase não há oscilação*. Talvez você tenha sentido necessidade de mostrar, matematicamente, que, realmente, com $m = m_{\text{ótimo}} = 2\,m_{\text{crítico}}$ quase não há oscilação. E é o que você fará, neste item. E com isso aprenderá algo importante, para além do problema específico de um sistema massa mola amortecido. Então vamos lá. Primeiro, fazendo uso da expressão para $x(t)$ obtida no item **d** da Atividade 2-107 (trata-se da expressão para $x(t)$ no caso de subamortecimento, mas em termos dos valores iniciais x_0 e v_{x_0}), obtenha, considerando $v_{x_0} = 0$ (veremos que isso não será restritivo):

$$x(t) = x_0\, e^{-bt/2m}\left(\cos\omega t + \frac{b}{2m\omega}\,\text{sen}\,\omega t\right),$$

com

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}\,.$$

Em seguida, fazendo

$$m = m_{\text{ótimo}} = 2\,m_{\text{crítico}} = \frac{b^2}{2k},$$

obtenha (faça uso do resultado em (328))

$$x(t) = x_0\,e^{-kt/b}\left(\cos\frac{kt}{b} + \text{sen}\,\frac{kt}{b}\right).$$

Agora, faremos algo muito interessante, que talvez seja novidade para você: definiremos as grandezas adimensionais

$$\tilde{x} \equiv \frac{x}{x_0} \qquad \text{e} \qquad \tilde{t} \equiv \frac{t}{b/k},$$

obtendo com isso (verifique)

$$\tilde{x}(\tilde{t}) = e^{-\tilde{t}}\,(\cos\tilde{t} + \text{sen}\,\tilde{t})\,.$$

Esta igualdade nos dá a posição da partícula *em unidades de* x_0, em função do tempo *em unidades de* b/k - lembrando que se trata de um movimento subamortecido com o valor de m que maximiza ω. A Fig. 29 mostra o gráfico de $\tilde{x}(\tilde{t})$, para $\tilde{t} \geq 0$. Você percebe a importância deste gráfico? Ele mostra justamente o que queríamos confirmar (por enquanto, considerando $v_{x_0} = 0$): que com $m = m_{\text{ótimo}} = 2\,m_{\text{crítico}}$ quase não há oscilação. Não importa qual é o valor de x_0, nem qual é o valor da razão b/k; após um ciclo (pensando apenas na fase - portanto, para $\tilde{t} = 2\pi$), a amplitude cai praticamente a zero, em comparação com x_0 $\left(\tilde{x}(2\pi) = e^{-2\pi} \approx 0{,}0019\right)$.[155] Muito bem, falta nos convencermos do seguinte: a conclusão de que *com* $m = m_{\textit{ótimo}} = 2\,m_{\textit{crítico}}$ *quase não há oscilação* permanece válida mesmo que v_{x_0} seja diferente de zero. Isso é simples. Consideremos, por exemplo, $x_0 > 0$ e $v_{x_0} > 0$. Por maior que seja o valor de v_{x_0}, em algum instante teremos um valor máximo de x (maior que x_0, é claro), e, nesse instante, o corpo estará momentaneamente em repouso, e portanto a análise que acabamos de fazer permanece válida, entende? Podemos reiniciar a contagem do tempo, com um novo valor de x_0. Convença-se disso. E convença-se de que este raciocínio também se aplica considerando-se $v_{x_0} < 0$.

Em suma: $m = m_{\text{ótimo}} = 2\,m_{\text{crítico}} = b^2/2k$ maximiza a frequência (angular) de oscilação ω (fazendo $\omega = \omega_{\text{máximo}} = k/b$), mas com esse valor de m quase não há oscilação - independentemente dos valores de x_0, v_{x_0}, k e b (estes dois não nulos). Assim, em um movimento subamortecido que não esteja muito próximo do estado de amortecimento crítico, ω diminui com o aumento de m (como mostra a Fig. 28). E, com o aumento de m, a amplitude não vai a zero tão rapidamente.

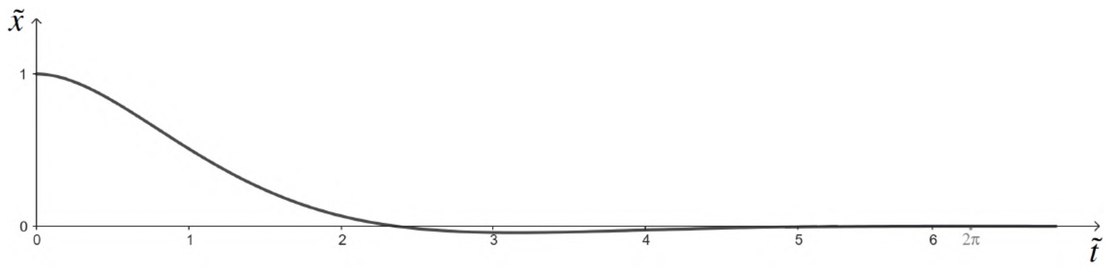


Figura 29: Atividade 2-108, item **f**.

[155] Esse tipo de análise, em que observamos valores relativos, em vez de valores absolutos, é muito comum na física.

Uma observação final. Infelizmente, um arrasto linear pode não modelar bem o arrasto real sofrido pelo corpo de um sistema massa-mola; talvez seja necessário um arrasto quadrático, ou mesmo uma expressão mais complicada... Pesquise a respeito. Isso é particularmente importante se estivermos planejando realizar um experimento para testar as previsões obtidas nesta atividade e na Atividade 2-107.

Atividade 2-109: Seja $h(x)$ a função obtida a partir de uma determinada *combinação* ou *composição* de duas funções $f(x)$ e $g(x)$. Será que podemos obter uma aproximação para $h(x)$ a partir de aproximações para $f(x)$ e $g(x)$? Esta é uma questão delicada, porque trabalhar com aproximações requer cuidados que não são necessários quando trabalhamos com igualdades. Faremos uma primeira análise disso nesta atividade (continuaremos a explorar aproximações na Parte II-C desta série), através de um exemplo: tentaremos obter aproximações locais, em torno de $x = 0$, para $\operatorname{tg} x \equiv (\operatorname{sen} x)/(\cos x)$ a partir de aproximações locais para $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.

a) Lembre-se que você mostrou, na Atividade 2-68, que (veja (222))

$$\operatorname{tg} x \approx x\,, \quad \text{para } |x| \ll 1. \tag{329}$$

Agora, aplicando a aproximação (232) à função $f(x) = \operatorname{tg} x$, obtenha a seguinte aproximação de ordem 3 para $\operatorname{tg} x$:

$$\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3}, \quad \text{para } |x| \ll 1. \tag{330}$$

Trata-se da aproximação correta - no sentido de que esta é a melhor aproximação de terceira ordem para a função $\operatorname{tg} x$, a partir de $x = 0$. Nosso desafio é chegar a esta aproximação a partir de aproximações para $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.

b) Vimos que $\operatorname{sen} x \approx x$ e $\cos x \approx 1 - x^2/2$, para $|x| \ll 1$ (veja (222) e (223), respectivamente). Fazendo uso destas aproximações e da aproximação binomial (veja (221)), obtenha uma aproximação local de terceira ordem para $\operatorname{tg} x$, definida como $(\operatorname{sen} x)/(\cos x)$, e compare com a melhor aproximação de terceira ordem possível em (330). (Dica: use a aproximação binomial para obter $1/\cos x \approx 1 + x^2/2$, para $|x| \ll 1$.)

c) Agora, obtenha uma aproximação local de terceira ordem para $\operatorname{tg} x$ mantendo a aproximação do item **b** para $\cos x$, mas substituindo a aproximação para $\operatorname{sen} x$ por $\operatorname{sen} x \approx x - x^3/6$, para $|x| \ll 1$ (veja (224)), e compare com a aproximação em (330).

d) A aproximação obtida no item **c** é a melhor aproximação de terceira ordem possível para $\operatorname{tg} x$, em torno de $x = 0$. Sabemos disso devido à comparação com a aproximação em (330). Mas haveria uma forma de obtermos uma aproximação de terceira ordem para $\operatorname{tg} x$, em torno de $x = 0$, a partir de aproximações para $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, e termos confiança de que se trata da melhor aproximação possível sem comparação com a aproximação em (330)? Sim, há. É o que veremos neste item. Podemos escrever (veja (224)):

$$\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{6} + \mathscr{O}(x^5), \quad \text{para } |x| \ll 1.$$

Vamos procurar entender muito bem esta relação. Ela nos diz que $\operatorname{sen} x \approx x - x^3/6$ é a melhor aproximação de terceira ordem possível para $\operatorname{sen} x$, e que a aproximação só pode ser melhorada, em princípio, com termos de ordem ≥ 5. (Você pode perguntar: por que não com termos de ordem ≥ 4? Porque $\operatorname{sen} x$ é uma função ímpar; veja a digressão realizada na Atividade 2-71). Entenda a expressão "$\mathscr{O}(x^5)$" como *um polinômio desconhecido contendo apenas termos de* *expoentes não inferiores a* 5.[156] Similarmente, também podemos escrever (veja (223)):

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \mathscr{O}(x^4).$$

Agora, identificando que $\operatorname{tg} x$ é uma função ímpar, podemos escrever:

$$\operatorname{tg} x \approx c_1 x + c_3 x^3 + \mathscr{O}(x^5).$$

Nosso desafio é obter os coeficientes c_1 e c_3. Vamos lá! Temos:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \implies c_1 x + c_3 x^3 + \mathscr{O}(x^5) \approx \frac{x - \frac{x^3}{6} + \mathscr{O}(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \mathscr{O}(x^4)}\,.$$

Multiplicando ambos os membros por $1 - \frac{x^2}{2} + \mathscr{O}(x^4)$, obtemos (realizar esta multiplicação é uma pequena sacada):

$$\left[c_1 x + c_3 x^3 + \mathscr{O}(x^5)\right]\left[1 - \frac{x^2}{2} + \mathscr{O}(x^4)\right] \;\approx\; x - \frac{x^3}{6} + \mathscr{O}(x^5). \tag{331}$$

Entenda que a aproximação acima para $\operatorname{tg} x$ só pode ser melhorada com um polinômio de ordem não inferior a 5, e, portanto, isso não afeta os valores de c_1 e c_3. Antes de continuarmos, vamos introduzir um pouco do que podemos chamar de "*álgebra da notação* $\mathscr{O}$". Convença-se de que temos, por exemplo,

$$x\mathscr{O}(x^4) = \mathscr{O}(x^5),\;\; x^3\mathscr{O}(x^4) = \mathscr{O}(x^7),\;\; \mathscr{O}(x^5)\mathscr{O}(x^4) = \mathscr{O}(x^9),$$

e assim por diante. Basta lembrar que "$\mathscr{O}(x^n)$" ($n \in \mathbb{N}$) denota um polinômio *desconhecido* contendo apenas termos de expoentes não inferiores a n. Pois bem, trabalhando no membro esquerdo de (331), obtenha os coeficientes c_1 e c_3, e, com isso, a melhor aproximação de terceira ordem para a função $\operatorname{tg} x$, em torno de $x = 0$.[157]

e) Mostre que o método apresentado no item **d** *revela* que as aproximações para $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ usadas no item **b** ($\operatorname{sen} x \approx x$ e $\cos x \approx 1 - x^2/2$, para $|x| \ll 1$) não são suficientes para a obtenção da melhor aproximação de terceira ordem possível para $\operatorname{tg} x$, em torno de $x = 0$. E veja como isso reforça que se trata de um método confiável. (Dica: no desenvolvimento, perceba que, em uma expressão em que um dos termos é $\mathscr{O}(x^3)$, há um coeficiente de x^3 desconhecido.)

Atividade 2-110: Uma das aplicações mais conhecidas do cálculo integral é o cálculo de áreas de figuras planas. Muitas vezes, há até um exagero, e vários estudantes aprendem a enxergar

[156] Há definições matemáticas mais técnicas para a expressão "$\mathscr{O}(x^n)$", sendo n um número natural (pesquise a respeito, se for de seu interesse); mas, para o uso que estamos fazendo dela aqui, a definição apresentada é suficiente: "$\mathscr{O}(x^n)$" denota *um polinômio desconhecido contendo apenas termos de expoentes não inferiores a* n. Com $n = 5$, perceba que não necessariamente o polinômio desconhecido $\mathscr{O}(x^5)$ contém um termo como, por exemplo, $3x^5$; basta que não haja termo de expoente inferior a 5. E, se você estiver em dúvida, "$\mathscr{O}$" é um "o" caligráfico maiúsculo.

[157] Voltaremos a trabalhar com a "*notação* $\mathscr{O}$" na Parte II-C. Mas, lá, veremos *igualdades*, em vez de aproximações. Por exemplo, escreveremos: $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \mathscr{O}(x^5)$, isto significando que a função $\operatorname{sen} x$ pode ser expressa como uma série infinita (revise o que dissemos sobre séries infinitas na seção 1) cujos primeiros termos são x e $-x^3/6$. Neste caso, "$\mathscr{O}(x^5)$" denota os demais termos da série, e nos diz que esses outros termos têm expoentes não inferiores a 5; mas não os denota de modo específico! Assim, o mesmo "$\mathscr{O}$" pode ser usado para duas séries distintas como $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \mathscr{O}(x^5)$ e $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \mathscr{O}(x^5)$, que não têm os mesmos coeficientes nos termos de expoentes maiores que 3, entende?

uma integral definida como uma determinada área (em alguns casos, multiplicada por -1). Isso é ruim, porque nem sempre há uma área evidente, no problema, nem se deseja calcular uma área. Nós físicos, em grande maioria, olhamos para uma integral definida como um tipo de soma: uma soma de infinitos termos infinitesimais - dizendo, assim, um tanto informalmente (sabemos que, por trás, há um limite - que, aliás, discutiremos na Parte II-B). De todo modo, o uso de integrais definidas para calcular áreas é, sem dúvida, uma grande *aplicação*. E veja, grifamos a palavra "aplicação" justamente para reforçar que preferimos não fazer uma identificação direta entre integrais definidas e áreas: ou usamos o cálculo integral para calcular uma área de interesse, ou *interpretamos* uma determinada integral como sendo numericamente igual a uma certa área (o que, em alguns casos, é um recurso muito útil; veja, por exemplo, a Atividade 2-42). Com o que vimos até aqui, em princípio podemos usar o cálculo integral - com funções reais de uma variável real - para calcular a área de qualquer figura plana delimitada pelos gráficos de funções conhecidas e, em alguns casos, também por linhas verticais. Por que "em princípio"? Porque nem sempre as integrais podem ser calculadas analiticamente; mas, nesses casos, podemos contar com *métodos numéricos* - alguns dos quais exploraremos na Parte III. Ilustraremos um pouco do que dissemos nos itens a seguir.

a) Em um aplicativo como o Geogebra, esboce os gráficos das funções $f(x) = \cos x$ (com $x \geq 0$) e $g(x) = e^{x/2}$ (com $x \geq 0$), e trace a linha vertical de equação $x = \pi/2$. Nosso interesse, aqui, é calcular a área da região delimitada por esta linha e pelos gráficos de $f(x)$ e $g(x)$. Antes de usar o cálculo integral, faça o seguinte: observando que a figura cuja área queremos calcular pode ser encarada como um "triângulo deformado", estime essa área. Certamente é possível concluir que a área correta está abaixo de um determinado valor. Que valor é esse? Em seguida, use o cálculo integral para calcular essa área, exatamente, e compare o valor exato com o valor obtido em sua estimativa (que não pretendia ser lá grande coisa, mas que ao menos garantia um valor abaixo do qual a área correta estaria).

b) Calcule a área da região delimitada pela linha vertical de equação $x = 0$ (ou seja, pelo eixo y) e pelos gráficos de $f(x) = \ln(x+1)$ e $g(x) = 1$. Antes, esboce-os em um aplicativo como o Geogebra. (Dica: faça uso do resultado em (139) para obter, por inspeção, as antiderivadas de $f(x)$.)

c) Como você calculou a área da região do item **b**? Inicialmente escrevendo (sendo b um número a ser encontrado, ou já encontrado)

$$A = \int_0^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x \quad \text{ou} \quad A = \int_0^b g(x)\mathrm{d}x - \int_0^b f(x)\mathrm{d}x\ ?$$

Dá no mesmo, é claro, embora nós aqui consideremos a primeira expressão mais elegante - não só por ser mais concisa, mas também porque nela a área A é expressa como uma "soma" (integral) de *elementos de área* $[g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x$ (procure visualizar os retângulos de área infinitesimal $[g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x$ na figura gerada pelo aplicativo), em vez de como uma diferença entre duas áreas finitas. Bem, talvez você tenha seguido outro caminho... Vamos explorar uma alternativa, aqui. Primeiro, observando a figura gerada pelo aplicativo, convença-se de que podemos expressar a área A da região do item **b** como:

$$A = \int_0^1 x(y)\mathrm{d}y = \int_0^1 f^{-1}(y)\mathrm{d}y.$$

Em seguida, obtenha $f^{-1}(y)$ e calcule A através da expressão acima. Ao final, responda para si mesmo, ou para si mesma: foi mais fácil ou mais difícil? (Se possível, discuta com seus colegas.)

d) Considere o seguinte problema: calcular a área abaixo da curva de equação $y = e^{-x^2}$, na região $-1 \leq x \leq 1$ (veja a Fig. 30). Infelizmente, não existe solução analítica para este problema, porque a função $f(x) = e^{-x^2}$ não possui antiderivada que possa ser expressa em termos de funções elementares (dissemos isso ao final da subseção 2.2.1); tudo o que podemos fazer é obter aproximações - e excelentes aproximações - para esta área, através de métodos numéricos (alguns dos quais veremos na Parte III desta série). Sua tarefa, neste item, e explorar algum aplicativo gratuito que calcule esta área numericamente. Perceba que, no mínimo, você precisará escrever a integral que corresponde a essa área (a menos que esteja usando alguma *IA generativa*).

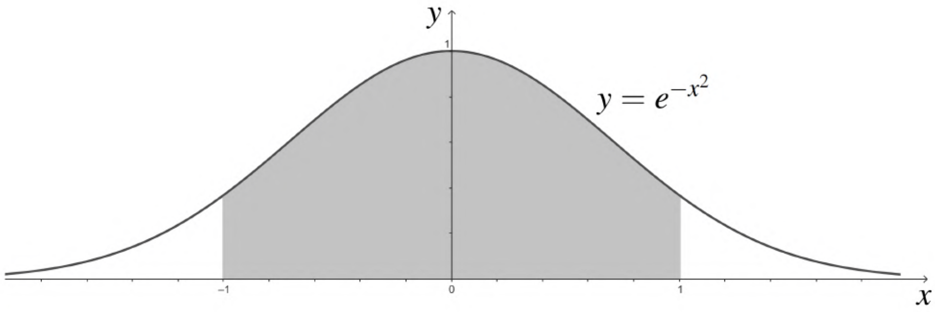


Figura 30: Atividade 2-110, item **d**.

e) No item anterior, vimos um exemplo de que o problema no cálculo da área de uma região delimitada por gráficos de funções pode estar na impossibilidade de se obter as antiderivadas (ou primitivas) dessas funções. Contudo, é interessante observar que há casos em que as funções em questão possuem antiderivadas conhecidas, e, mesmo assim, não é possível calcularmos analiticamente a área de uma certa região delimitada por seus gráficos, pela impossibilidade de determinarmos, analiticamente, um ponto de intersecção entre eles. Vamos explorar um exemplo neste item. Queremos calcular a área da região pertencente ao primeiro quadrante do plano xy e delimitada pela reta $x = 0$ e pelos gráficos das funções $f(x) = e^x - 1$ e $g(x) = x + 1$. Visualize essa região esboçando os gráficos destas funções, fazendo uso de um aplicativo como o Geogebra. Daí, escreva a integral a ser calculada, e perceba que há um limite de integração que não pode ser determinado analiticamente. Tal limite de integração precisa ser determinado numericamente. Realize esta tarefa fazendo uso de algum aplicativo gratuito, e então conclua o cálculo da integral que fornece a área de interesse. (Dica: O limite de integração desconhecido tem a ver com um ponto de intersecção entre os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$, no primeiro quadrante. Para encontrar esse ponto de intersecção, uma opção é solicitar ao aplicativo que resolva, numericamente, a equação $f(x) = g(x)$. Ou então, use recursos do próprio aplicativo que escolheu para esboçar os gráficos.)
f) Fazendo uso de algum aplicativo gratuito, calcule a área da região delimitada pela reta $x = 0$ e pelos gráficos das funções $f(x) = e^{-x^2}$ e $g(x) = x$. Perceba que aqui a dificuldade é dupla: não existe antiderivada de $f(x)$ em termos de funções elementares, e há um ponto de intersecção entre os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$ que não pode ser determinado analiticamente, em termos de funções elementares.[158]

Atividade 2-111: Nesta atividade, calcularemos o volume de um *cone de revolução*[159] de

[158] Há uma solução numérica criativa que exploraremos na Parte III desta série: calcularemos a integral numericamente em um intervalo $[0, b]$ (com b inicialmente desconhecido) limitado pela condição de que $f(x) - g(x) \geq 0$ (e com isso nos despreocupamos com o valor de b, porque estaremos dentro do intervalo de interesse enquanto a desigualdade $f(x) - g(x) \geq 0$ for satisfeita). Dessa forma, lidaremos de uma só vez com as duas dificuldades expostas no item **f**. Aguarde...

[159] Um cone de revolução é formado ao girarmos um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos. A altura

diferentes formas, e faremos uma comparação entre elas.[160]
a) Podemos calcular o volume de um cone de revolução imaginando-o composto por infinitos discos de altura infinitesimal dh. A Fig. 31a ilustra um desses discos, cujo raio tem algum valor x entre 0 e R, e cuja posição no eixo y tem algum valor y entre 0 e H.[161] Seu volume infinitesimal, portanto, pode ser expresso como $\mathrm{d}V = \pi x^2 \mathrm{d}h$. Obtenha uma equação relacionando x e y, e use-a para expressar dV em termos de x e dx (em vez de em termos de x e dh). Daí, calcule o volume do cone a partir da igualdade

$$V_{\text{cone}} = \int_{x=0}^{x=R} \mathrm{d}V.$$

(Dica: você precisará prestar atenção ao fato de que dh, por ser um comprimento, é necessariamente não negativo. Se você escrever $\mathrm{d}h = \mathrm{d}y$, estará cometendo um erro, porque quando o valor de x aumenta - na integral acima estamos fazendo x variar de 0 a R -, o valor de y diminui, e, portanto, temos $\mathrm{d}y < 0$.)
b) Agora, use a equação obtida no item **a**, relacionando x e y, para expressar dV em termos de y e dy. Daí, calcule o volume do cone a partir da igualdade

$$V_{\text{cone}} = \int_{y=0}^{y=H} \mathrm{d}V.$$

(Dica: na integral acima estamos fazendo y variar de 0 a H, e, portanto, temos $\mathrm{d}y > 0$. Daí, podemos escrever $\mathrm{d}h = \mathrm{d}y$.)
c) Alternativamente, podemos calcular o volume de um cone de revolução imaginando-o composto por infinitas cascas cilíndricas coaxiais de espessura infinitesimal dr. A Fig. 31b ilustra uma dessas cascas cilíndricas, cujo raio interno (ou externo, se preferir) tem algum valor x entre 0 e R, e cuja altura tem algum valor y entre 0 e H. Seu volume infinitesimal, portanto, pode ser expresso como $\mathrm{d}V = 2\pi x y \,\mathrm{d}r$.[162] Obtenha uma equação relacionando x e y, e use-a para expressar dV em termos de x e dx (em vez de em termos de x, y e dr). Daí, calcule o volume do cone a partir da igualdade

$$V_{\text{cone}} = \int_{x=0}^{x=R} \mathrm{d}V.$$

d) Agora, expresse $\mathrm{d}V = 2\pi x y \,\mathrm{d}r$ em termos de y e dy, e daí calcule o volume do cone a partir da igualdade

$$V_{\text{cone}} = \int_{y=0}^{y=H} \mathrm{d}V.$$

(Dica: você precisará prestar atenção ao fato de que dr, por ser um comprimento, é necessariamente não negativo. Se você escrever $\mathrm{d}r = \mathrm{d}x$, estará cometendo um erro, porque quando o valor

H do cone é o comprimento desse cateto, e o raio R do cone é o comprimento do outro cateto.

[160] Se você vem estudando pelos textos do projeto *Matemática para Física*, deve lembrar de já ter usado cálculo integral para mostrar que o volume de um cone reto de altura H e base circular de raio R é $\pi R^2 H/3$: foi no Exercício 55 do primeiro texto (Silva & Peixoto 2020).

[161] Pode ser a posição do centro do topo do disco, do centro da base do disco, ou de um ponto entre esses centros. Não faz diferença, porque a altura do disco é infinitesimal. Contudo, conceitualmente, pode ser mais interessante considerar y, neste item **a**, a posição do centro do topo, e, no próximo item, a posição do centro da base do disco. Esta é a nossa sugestão.

[162] Você pode se imaginar "cortando" essa casca em uma direção paralela ao eixo dela, e "abrindo-a" para obter um paralelepípedo de lados $2\pi x$, y e dr. É claro, isso só funciona porque a espessura da casca cilíndrica é infinitesimal.

de y aumenta - na integral acima estamos fazendo y variar de 0 a H -, o valor de x diminui, e, portanto, temos d$x < 0$.)
e) Você calculou o volume de um cone de revolução de quatro formas - duas com o uso de discos de altura infinitesimal (itens **a** e **b**) e duas com o uso de cascas cilíndricas de espessura infinitesimal (itens **c** e **d**). Qual delas foi a mais simples, em sua opinião?

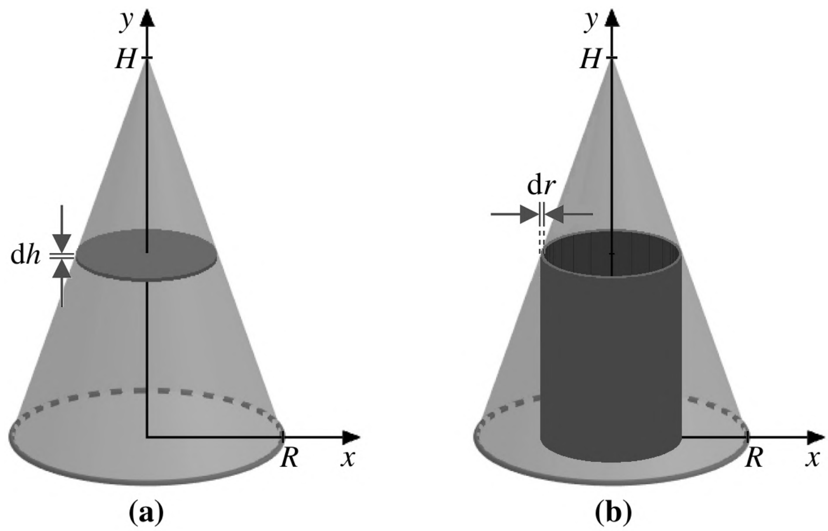


Figura 31: Atividade 2-111.

Atividade 2-112: Seja $\mathscr{R}$ a região do plano xy delimitada à esquerda pela reta de equação $x = 1$, à direita pela reta de equação $x = 2$, acima pelo gráfico da função $f(x) = x^2 + 1$, e abaixo pela reta de equação $y = 1$ (ou, equivalentemente, pelo gráfico da função $g(x) = 1$).
a) Faça um esboço dessa região - à mão livre ou usando um aplicativo como o Geogebra.
b) Calcule o volume do *sólido de revolução* obtido pela revolução da região $\mathscr{R}$ em torno do eixo y. (Dica: realizando a Atividade 2-111, você viu que há, basicamente, quatro formas de fazer esse cálculo; escolha a que lhe parecer mais adequada. Faça uma boa escolha, ou as contas ficarão desnecessariamente mais complicadas.)
c) Agora, calcule o volume do sólido de revolução obtido pela revolução da região $\mathscr{R}$ em torno do eixo x. Temos aqui uma novidade: uma revolução em torno do eixo x, em vez de em torno do eixo y. Seu desafio é lidar com essa nova situação, e escolher o caminho mais adequado.

Convém pormos em destaque a seguinte conclusão, à qual você pode ter chegado realizando a Atividade 2-111 e a Atividade 2-112:

> Em geral, o cálculo do volume de um *sólido de revolução* determinado pela revolução *em torno do eixo y* de uma região delimitada pelos gráficos de duas funções $f(x)$ e $g(x)$ é mais simples com o uso de cascas cilíndricas de espessura infinitesimal, e com a escolha da variável x como variável de integração.
> E, em geral, o cálculo do volume de um *sólido de revolução* determinado pela revolução *em torno do eixo x* de uma região delimitada pelos gráficos de duas funções $f(x)$ e $g(x)$ é mais simples com o uso de discos (com ou sem buraco central, conforme o caso) de espessura infinitesimal, e com a escolha da variável x como variável de integração.
> Nos dois casos, a exceção é quando as funções $f(x)$ e $g(x)$ são menos facilmente integráveis que suas inversas, $f^{-1}(x)$ e $g^{-1}(x)$.

Atividade 2-113: a) Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a,b]$. Convença-se de que o comprimento S da curva de equação $y = f(x)$, na região $a \leq x \leq b$ (ou seja, o comprimento S do gráfico de $f(x)$, na região $a \leq x \leq b$), pode ser expresso como

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\, \mathrm{d}x\,. \tag{332}$$

(Dica: perceba que entre x e $x + \mathrm{d}x$ temos o seguinte comprimento de curva - pela aplicação do teorema de Pitágoras: $\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$.)[163]

b) A expressão em (332), pela presença da raiz quadrada, sugere que calcular comprimentos de curvas é, em geral, uma tarefa complicada, não acha? Isso é verdade. Na vasta maioria dos casos, $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ não possui antiderivada em termos de funções elementares, e, assim, o comprimento do gráfico de uma função $f(x)$, em uma região $a \leq x \leq b$, só pode ser calculado numericamente. Exploraremos isso na Parte III desta série. Veremos aqui um problema específico que tem solução analítica fechada: *o cálculo do comprimento da trajetória de um projétil lançado no vácuo* (ou sendo desprezível a resistência do ar) *a partir do solo*, com velocidade inicial de módulo v_0, fazendo um ângulo agudo θ com uma direção horizontal. Estamos contando com conhecimentos básicos de cinemática, de sua parte, tá certo? Muito bem, podemos escolher o eixo x como o eixo horizontal que forma o ângulo agudo θ com o vetor velocidade inicial, o eixo y como o eixo vertical apontando para cima, e a posição inicial do projétil, no instante $t = 0$, coincidindo com a origem do plano xy. Com isso, temos as seguintes funções, que localizam o projétil no instante t:

$$x(t) = (v_0 \cos\theta)\, t \qquad \text{e} \qquad y(t) = (v_0 \operatorname{sen}\theta) t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Segue então a seguinte equação da trajetória (verifique):

$$y = (\operatorname{tg}\theta) x - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta} x^2, \tag{333}$$

de onde podemos encontrar o alcance R (verifique):

$$R = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\theta.$$

Obtenha a seguinte expressão para o comprimento S da trajetória:

$$S = \int_0^{(v_0^2/g)\operatorname{sen}2\theta} \sqrt{1 + \left[\operatorname{tg}\theta - \frac{g}{v_0^2 \cos^2\theta} x\right]^2}\, \mathrm{d}x. \tag{334}$$

c) A integral em (334) é desafiadora, e exige técnicas de integração que estudaremos na Parte II-B desta série. Você fará essa conta lá, em uma atividade, mas vamos adiantar aqui o resultado, já convenientemente simplificado:

$$S = \frac{v_0^2}{g}\left[\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}\cos^2\theta\, \ln\left(\frac{1+\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}\right)\right], \quad \text{para } 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}. \tag{335}$$

[163] Se você vem estudando pelos textos do projeto *Matemática para Física*, deve lembrar de já ter calculado um comprimento de curva: foi no Exercício 57 do primeiro texto (Silva & Peixoto 2020). Exploramos um caso intencionalmente simples: com a curva $y = x^{3/2}$, que deixou a integral fácil de ser calculada, por inspeção.

Fazendo uso do Geogebra ou de outro aplicativo de sua escolha, esboce o gráfico de

$$f(\theta) = \operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}\cos^2\theta \, \ln\left(\frac{1+\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}\right), \quad \text{para } 0 \le \theta < \frac{\pi}{2},$$

e, usando recursos do aplicativo, obtenha o valor de θ que maximiza S. Forneça a resposta em graus, com aproximação de 2 casas decimais.
d) Observe o gráfico de $f(\theta)$ - que pode ser pensado como o gráfico de S, em unidades de v_0^2/g (pois $f(\theta) = S/(v_0^2/g)$). Era esperado termos $f(\theta) = 0$ para $\theta = 0$, concorda? Agora, o que seria esperado para $\theta = \pi/2$? Bem, não podemos fazer $\theta = \pi/2$, exatamente, porque teríamos uma divisão por zero no argumento do logaritmo em (335).[164] Mas o gráfico gerado pelo aplicativo indica que $f(\theta)$ tende a 1 quando θ tende a $\pi/2$.[165] Justifique que isso poderia ter sido previsto. (Dica: Seja $h_{\max_v}$ a altura máxima alcançada pelo projétil *em um lançamento vertical*. É fácil mostrar que $h_{\max_v} = v_0^2/2g$. Reescreva a igualdade (335) em termos de $h_{\max_v}$.)
e) Usando recursos do aplicativo, obtenha o valor máximo de $f(\theta)$, e com ele o valor máximo de S em termos de S_v - que é o comprimento da trajetória no caso de um lançamento vertical. Forneça a resposta com aproximação de 2 casas decimais.
f) Agora, realize uma nova tarefa usando o aplicativo: fazendo $g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$ e $v_0 = 10\,\text{m/s}$ na equação da trajetória - equação (333) - e restringindo o valor de x à faixa $0 < x < R = (v_0^2/g)\operatorname{sen}2\theta$, produza uma animação deixando θ como um parâmetro livre para variar na faixa $0 < \theta < \pi/2$. Verifique se o valor encontrado para θ, no item **c**, que produz o comprimento máximo na trajetória parece razoável. (Você verá que não se trata de algo evidente, apenas olhando para a animação; mas uma coisa é certa: fica claro que o valor ótimo de θ está na faixa $\pi/4 < \theta < \pi/2$, e não na faixa $0 < \theta < \pi/4$.)

2.8 O que vimos, até aqui, em nosso estudo informal de equações diferenciais

Nesta subseção, comentaremos brevemente o que vimos a respeito de equações diferenciais nesta Parte II-A. Ao final, teremos uma visão coesa do que foi explorado de forma intencionalmente dispersa, até aqui.

Como dissemos na Introdução, não há nesta Parte II-A da série uma seção ou subseção intitulada "*equações diferenciais*", ou algo parecido; optamos por explorar equações diferenciais ao longo do texto, em 17 atividades: nas Atividades 2-8, 12, 39, 48, 49, 50, 51, 52, 54, 55, 60, 61, 65, 66, 80, 97 e 107. A propósito, eis aqui um ótimo exemplo de por que as atividades devem sem encaradas como parte integrante do texto, neste projeto: se você não realizou nenhuma dessas 17 atividades, simplesmente não viu nada sobre equações diferenciais - tema de fundamental importância para a física.

Vamos rever algumas definições básicas:

- Grosso modo, uma *equação diferencial* é uma equação cujo objeto desconhecido é uma função, e que envolve ao menos uma derivada dessa função - não necessariamente uma derivada de primeira ordem.

[164] O desenvolvimento que leva à igualdade (334) pressupõe $\theta \neq \pi/2$, ou teríamos, por exemplo, uma divisão por zero na equação da trajetória (verifique).

[165] Mostrar, analiticamente, que $f(\theta)$ tende a 1 quando θ tende a $\pi/2$ é um problema desafiador, que exploraremos na Parte II-B.

- As equações diferenciais que exploramos nesta Parte II-A da série são, todas, *equações diferenciais ordinárias*, ou *EDOs*, porque envolvem apenas derivadas ordinárias - ou seja, derivadas de funções reais de uma única variável real. Quando a equação diferencial envolve uma função de duas ou mais variáveis e ao menos uma de suas *derivadas parciais* (definidas no início da Parte I desta série), ela é chamada de *equação diferencial parcial*, ou *EDP*. Nos próximos itens, estaremos sempre nos referindo a EDOs.

- A *ordem* de uma equação diferencial é a ordem da derivada mais elevada presente.

- A *solução geral* de uma equação diferencial de ordem n envolve *n constantes arbitrárias*. Consideremos, por exemplo, o movimento de uma partícula em uma dimensão, ao longo do eixo x. A segunda lei de Newton nos fornece uma equação diferencial de segunda ordem para $x(t)$ - a posição da partícula como função do tempo -, mas não determina a posição inicial $x(0)$, nem a velocidade inicial $v_x(0)$ (sendo $v_x(t)$ a derivada de $x(t)$). Assim, é de se esperar que a solução geral dessa equação diferencial envolva duas constantes arbitrárias, que serão determinadas pelos valores de $x(0)$ e $v_x(0)$ (ou pelos valores de $x(t_0)$ e $v_x(t_0)$, com o *instante inicial* t_0 não necessariamente igual a zero). As igualdades $x(0) = x_0$ e $v_x(0) = v_{x_0}$, com x_0 e v_{x_0} supostamente conhecidos, são chamadas de *condições iniciais*, e x_0 e v_{x_0} são chamados de *valores inciais*.

- De formal geral, chamamos de *condições iniciais*, associadas a uma equação diferencial de ordem n em que $f(t)$ é a função desconhecida, as n condições

$$f(t_0) = y_0, \quad f'(t_0) = y_0', \quad \ldots \quad , \quad f^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)},$$

  sendo y_0, y_0', $\ldots$, $y_0^{(n-1)}$ os chamados *valores iniciais* de $f(t)$, $f'(t)$, $\ldots$, $f^{(n-1)}(t)$, respectivamente, para um certo $t = t_0$. A expressão "iniciais" é usada porque comumente a variável independente é o tempo (e é por isso que estamos denotando tal variável por "t", é claro; neste caso, t_0 é o chamado *instante inicial*, e muitas vezes fazemos $t_0 = 0$, porque costuma ser a escolha mais conveniente). Apesar de estarmos considerando, neste item, uma equação diferencial de ordem n, em geral as equações diferenciais na física são de primeira ou de segunda ordem - e, portanto, temos apenas um ou dois valores iniciais.

- Um *problema de valor inicial* (ou um *problema de valores iniciais*, se preferir) é um problema composto por uma equação diferencial e por condições iniciais. Assim, resolver um problema de valor inicial é encontrar a função que satisfaz a equação diferencial e as condições iniciais dadas. Lembre-se que se a equação diferencial é de ordem n, sua solução geral envolve n constantes arbitrárias - que são determinadas pelas n condições iniciais no problema de valor inicial correspondente.

- Além das *condições iniciais*, há também as chamadas *condições de contorno*. Estas costumam estar associadas a valores assumidos pela função desconhecida em *pontos do espaço*, em vez de em *instantes na linha do tempo*.

- Vimos apenas dois "*métodos*" de resolução de uma equação diferencial: o da *inspeção* e o da *separação de variáveis*. O primeiro - que talvez nem devesse ser chamado de método (daí as aspas) - consiste em arriscarmos um palpite - mas um palpite consciente, um chute educado, por assim dizer (e nós, físicos, fazemos muito isso) - e testá-lo. Dizendo de outro modo: trata-se de *propor e testar uma solução tentativa*. A ideia básica do segundo método é reescrever a equação diferencial, de primeira ordem, de forma que em cada membro da igualdade haja apenas uma variável - a independente (por exemplo, x) ou a dependente (por exemplo, y). Isso permite integrarmos cada membro separadamente. Se estivermos resolvendo não apenas uma equação diferencial, mas um problema de valor inicial (como geralmente é o caso, na física), uma integral *definida* é particularmente adequada, porque a condição inicial já aparece em um dos limites de integração.

Agora, vejamos em que subseções as 17 atividades citadas acima estão distribuídas:

- 2.2.2 - *Cálculo com funções trigonométricas*: Atividades 2-8 e 2-12.
- 2.2.5 - *Cálculo com funções exponenciais e com funções logarítmicas*: Atividades 2-39, 2-48, 2-49, 2-50, 2-51, 2-52, 2-54 e 2-55.
- 2.2.6 - *Cálculo com funções hiperbólicas e com funções hiperbólicas inversas*: Atividades 2-60, 2-61, 2-65[166] e 2-66.
- 2.3 - *Aproximação linear local com novas funções elementares, e aproximações de ordem superior*: Atividade 2-80.
- 2.4 - *Diferenciação implícita e taxas relacionadas*: Atividade 2-97.
- 2.7 - *Atividades adicionais com funções elementares...*: Atividade 2-107.

Por fim, vamos organizar essas atividades por tema, acrescentando à lista algumas atividades correlatas (marcadas com um asterisco), em que nenhuma equação diferencial é resolvida, mas que integram um mesmo tema:

- *Oscilações*: Atividades 2-6*, 2-7*, 2-8, 2-9*, 2-21*, 2-101* - item **e**, 2-107 e 2-108*.

  Nas atividades acima, exploramos o tema "oscilações" desde a definição de um movimento harmônico simples a um estudo completo de oscilações amortecidas (mas sem o uso de números complexos). Voltaremos ao estudo de oscilações na Parte V desta série. Revisaremos oscilações amortecidas (desta vez com o uso de números complexos) e estudaremos *oscilações forçadas*, o importante fenômeno de *ressonância*, entre outros tópicos relacionados.

- *Equação de Schrödinger - poço de potencial infinito*: Atividade 2-12.
- *Movimento de corpos sujeitos a forças de resistência do ar (arrastos)*: Atividades 2-39, 2-48, 2-51, 2-65, 2-66 e 2-80.

  Nas três primeiras, trabalhamos com arrastos lineares, e nas Atividades 2-65 e 2-66 exploramos arrastos quadráticos. Tudo isso em uma dimensão. Na Atividade 2-80, voltamos a analisar o movimento de corpos sujeitos a arrastos lineares, mas dessa vez considerando um lançamento oblíquo; obtivemos a equação da trajetória da partícula e uma aproximação para seu alcance horizontal.[167]

[166] A Atividade 2-65, apesar de estar na subseção 2.2.6 (para estar junto da Atividade 2-66 - ambas sobre arrastos quadráticos), pode ser realizada logo após o estudo da subseção 2.2.5 - ou, mais especificamente, logo após a realização da Atividade 2-51.

[167] O surpreendente cálculo *exato* do alcance horizontal de uma partícula lançada obliquamente e sujeita a um arrasto linear será realizado ao final da Parte II-C desta série, com o uso de uma função não elementar denominada *função W de Lambert*.

- *Decaimento radioativo*: Atividade 2-49 e Atividade 2-53* - item **h**.
- *Lei do resfriamento de Newton*: Atividade 2-52.
- *Dilatação térmica*: Atividade 2-97 - item **c**.
- *Equação diferencial geral, sem ênfase em aplicações*: Atividades 2-50, 2-54, 2-55, 2-60 e 2-61.

3 Conclusão

Se você chegou até aqui, estudando com afinco tudo o que trouxemos nesta Parte II-A da série, e, especialmente, realizando - com ou sem ajuda, não importa - todas as 113 atividades, queremos lhe dar nossos parabéns! Estamos certos de que não foi uma jornada fácil. Você se deparou com tópicos cheios de detalhes e sutilezas, além de várias atividades extensas e complexas. Ao mesmo tempo, esperamos que, em grande medida, essa jornada tenha sido agradável para você. Para nós, preparar esse material foi um grande prazer, mas também um grande desafio!

Seu estudo de cálculo com funções reais de uma variável real prosseguirá - se você continuar fazendo uso do material relativo ao projeto *Matemática para Física* - na Parte II-B da série, e também na Parte II-C, onde nos dedicaremos especialmente ao estudo de *séries infinitas*.[168] Essas duas partes, juntas, terão menos páginas que esta Parte II-A. Assim, a conclusão de seu estudo de cálculo com funções reais de uma variável real *está* - como diria o matuto - *mais perto do que longe*.

Pedimos que nos ajude a divulgar este material didático. Ele está disponível a todos, e foi financiado pelo povo brasileiro.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, somos gratos ao nosso Criador. Sem Ele, nada faríamos. Agradecemos também aos pareceristas, por terem aceitado avaliar um texto tão longo. Seria impossível agradecer nominalmente a todas as pessoas que, direta ou indiretamente, têm contribuído para a realização deste projeto. Estamos certos de que ninguém faz nada sozinho.

[168] Veja na seção "Conclusão e Perspectivas", da Parte I, nosso planejamento para as demais partes desta série.

Referências

Anton H., Bivens I. & Davis S. (2014) Cálculo - Volume 1. 10ª edição. Porto Alegre: Bookman. 640 páginas.

Boulos P. (1999) Cálculo Diferencial e Integral - Volume 1. 1ª edição. São Paulo: Pearson Universidades. 398 páginas.

Flemming D. M. & Gonçalves M. B. (2006) Cálculo A. 6ª edição. São Paulo: Pearson. 464 páginas.

Guidorizzi H. L. (2018) Um Curso de Cálculo - Volume 1. 6ª edição. Rio de Janeiro: LTC. 636 páginas.

Larson R. (2016) Cálculo Aplicado: Curso rápido. 2ª edição. São Paulo: Cengage Learning. 640 páginas.

Leithold L. (1994) O Cálculo com Geometria Analítica - Volume 1. 3ª edição. São Paulo: Harbra. 788 páginas.

Morettin P. A., Bussab W. O. & Hazzan S. (2012) Cálculo: Funções de uma e várias variáveis. 3ª edição. São Paulo: Saraiva Uni. 448 páginas.

Munem M. A. & Foulis D. J. (1982) Cálculo - Volume 1. 1ª edição. Rio de Janeiro: LTC. 678 páginas.

Peixoto P., Oliveira M.H. & Barros A. (2023) Um curso básico de matemática para estudantes de graduação em física - Parte I. *Pesquisa e Ensino em Ciências Exatas e da Natureza*, 7 (e1950): 50-136.

Rogawski J. & Adams C. (2018) Cálculo - Volume 1. 3ª edição. Porto Alegre: Bookman. 592 páginas.

Silva T.C.S. & Peixoto P. (2020) Um curso rápido de cálculo diferencial e integral para pré-universitérios e calouros. *Pesquisa e Ensino em Ciências Exatas e da Natureza*, 4 (e1602): 1-44.

Stewart J., Clegg D. & Watson S. (2021) Cálculo - Volume 1. 9ª edição. São Paulo: Cengage Learning. 708 páginas.

Swokowski E. W. (1994) Cálculo com Geometria Analítica - Volume 1. 2ª edição. São Paulo: Makron Books. 744 páginas.

Thomas G. B., Weir M. D. & Hass J. (2012) Cálculo - Volume 1. 12ª edição. São Paulo: Pearson Universidades. 656 páginas.

Apêndice A: Respostas para as atividades

2-5) a) $-aA\,\mathrm{sen}(ax+b)$ **b)** $2(\cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x)$ **c)** $2\cos(2x)$ **d)** $x\cos x$
e) $2x\cos x - x^2 \mathrm{sen}\,x$ **f)** $3x^2\cos(x^3)$
2-6) a) Sim, pois $x(0) = A\cos\delta$. Por exemplo, se o observador escolhe zerar o cronômetro no momento em que $x = A$, temos $x(0) = A$ e, portanto, podemos ter $\delta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \ldots$ (pois $\cos(0) = \cos(\pm 2\pi) = \cos(\pm 4\pi) = \cos(\pm 6\pi) = \cdots = 1$). A escolha mais simples é, claro, $\delta = 0$.
b) $\Delta(\omega t + \delta) = 2\pi \implies \omega(\Delta t) = 2\pi \implies \omega T = 2\pi \implies T = 2\pi/\omega$
c) $v_x(t) = -\omega A\,\mathrm{sen}(\omega t + \delta)$ **d)** $a_x(t) = -\omega^2 A\,\cos(\omega t + \delta)$
2-8) f) $x(t) = (3{,}60\,\mathrm{cm})\,\cos((25{,}1\,\mathrm{s}^{-1})t - 2{,}56)$
2-9) c) $x(t) = x_0\cos\omega t + (v_{x_0}/\omega)\,\mathrm{sen}\,\omega t$ **d)** Não
2-10) c) $F(x) = (A/a)\,\mathrm{sen}\,(ax+b) + C$, $G(x) = (-A/a)\,\cos(ax+b) + C$
d) $F(x) = (x/2) + (\mathrm{sen}\,2x)/4 + C$, $G(x) = (x/2) - (\mathrm{sen}\,2x)/4 + C$
e) $F(t) = \frac{A^2}{2}t + \frac{A^2}{4\omega}\mathrm{sen}\,(2\omega t + 2\delta) + C$, $G(t) = \frac{A^2}{2}t - \frac{A^2}{4\omega}\mathrm{sen}\,(2\omega t + 2\delta) + C$
2-11) b) $I^2_{\mathrm{max}}/2$ **e)** $(2/\pi)I_{\mathrm{max}}$ (veja que $\overline{|I(t)|} < I_{\mathrm{rms}}$)
2-20) a) $F(x) = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}(ax) + C \quad (x \in \mathbb{R})$ e $G(x) = \frac{1}{a}\mathrm{arcsen}(ax) + C \quad \left(-\frac{1}{a} < x < \frac{1}{a}\right)$
b) $F(x) = A\,\mathrm{arctg}(x/A) + C \quad (x \in \mathbb{R})$ e $G(x) = A\,\mathrm{arcsen}(x/A) + C \quad (-A < x < A)$
c) $F(x) = (1/A)\,\mathrm{arctg}(x/A) + C \quad (x \in \mathbb{R})$ e $G(x) = \mathrm{arcsen}(x/A) + C \quad (-A < x < A)$
2-21) d) $t = \sqrt{\frac{m}{k}}\,[\mathrm{arcsen}(x/A) - \mathrm{arcsen}(x_0/A)]$
2-23) a) $b_1 < b_2 < b_3$
2-33) a) $\ln x$ (perceba então que $x\ln x - x + C$, com $x > 0$, são as antiderivadas de $\ln x$)
b) A/x **c)** $-A/x$ **d)** $2A/x$ **e)** $-2A/x$ **f)** $A/(2x)$
2-34) b) $\ln 2$
2-35) a) $5\ln 2$ **b)** $\frac{5}{4}\ln 3$ **c)** $-\frac{5}{4}\ln 3$ **d)** $\frac{A}{B}\ln\left(\frac{Bb+C}{Ba+C}\right)$ **e)** $\frac{A}{B}\ln\left(\frac{Bb+C}{Ba+C}\right)$ **f)** $\frac{A}{B}\ln\left(\frac{Bb+C}{Ba+C}\right)$
2-36) a) $F = PA$ **c)** $\mathrm{d}W = \frac{nRT}{V}\mathrm{d}V$
2-37) a) $f(x) = \ln|x|$ está implicitamente definida para todo $x \neq 0$.
2-38) a) Respectivamente $\ln 4$ (ou $2\ln 2$) e $-\ln 4$ (ou $-2\ln 2$).
2-39) b) Quer tenhamos $v_x > 0$ ou $v_x < 0$, v_x *diminui em módulo*, ao longo do intervalo de tempo $\mathrm{d}t$, e, portanto, a partícula está mais lenta (embora seja uma diferença infinitesimal) após esse intervalo de tempo. **c)** $v_x(t) = v_{x_0}\,e^{-bt/m}$. Como $e^{-bt/m} > 0$, $v_x(t)$ tem sempre o mesmo sinal que v_{x_0}, como esperado.
e) $v_x(t) = v_{x_0}\,e^{-b(t-t_0)/m}$
2-40) $f(x) = \ln x \; (x > 0) \implies F(x) = x\ln x - x + C$
2-41) a) $-\frac{1}{2}(1 - \ln 2) \approx -0{,}153$, $2\ln 2 - 1 \approx 0{,}386$ e $\frac{5}{2}\ln 2 - \frac{3}{2} \approx 0{,}233$, respectivamente.
2-44) a) $f'(x) = aAe^{ax}$ **b)** $g'(x) = \frac{A}{\alpha}e^{x/\alpha}$ **c)** $\tilde{f}'(x) = -aAe^{-ax}$ e $\tilde{g}'(x) = -\frac{A}{\alpha}e^{-x/\alpha}$
d) $F(x) = \frac{A}{a}e^{ax} + C$, $G(x) = \alpha A e^{x/\alpha} + C$, $\tilde{F}(x) = -\frac{A}{a}e^{-ax} + C$ e $\tilde{G}(x) = -\alpha A e^{-x/\alpha} + C$
e) $2(1 - e^{-6})$ e $(\sqrt{e} - 1)/2$, respectivamente. **h)** Aumenta.
2-45) e) $f'(x) = 2^x\ln 2$, $F(x) = 2^x/(\ln 2) + C$
2-46) a) $x(t) = x_0\,2^{t/\tau}$, com $x_0 = 1\,\mathrm{m}$ e $\tau = 1\,\mathrm{s}$. Também podemos escrever, diretamente: $x(t) = (1\,\mathrm{m})\,2^{t/1\,\mathrm{s}}$
b) $v_x(t) = \left(\frac{x_0}{\tau}\ln 2\right)2^{t/\tau}$ ou $v_x(t) = [(\ln 2)\,\mathrm{m/s}]2^{t/1\,\mathrm{s}}$; $a_x(t) = \left(\frac{x_0}{\tau^2}(\ln 2)^2\right)2^{t/\tau}$ ou $a_x(t) = [(\ln 2)^2\,\mathrm{m/s^2}]2^{t/1\,\mathrm{s}}$
2-47) a) $[x^x]' = (1 + \ln x)x^x$, $x > 0$ **b)** Sim, está. **c)** Não passaria.
2-48) a) $v_x(t) = v_{x_0}\,e^{-bt/m}$. Observe como a constante A é mais adequadamente escrita como v_{x_0}, pois $v_x(t) = A\,e^{-bt/m} \implies v_x(0) = A$. **b)** $x(t) = x_0 + \frac{mv_{x_0}}{b}\left(1 - e^{-bt/m}\right)$
c) Quando $t \to \infty$, $x \to x_0 + mv_{x_0}/b$, mas sem jamais termos $x = x_0 + mv_{x_0}/b$ (ao menos teoricamente; experimentalmente, não faz sentido dizer que a posição $x_0 + mv_{x_0}/b$ não foi alcançada quando a diferença entre ela e o valor de x é menor, em módulo, que a precisão da medida de posição, concorda?).
2-49) b, c) $\mathcal{N}(t) = \mathcal{N}_0\,e^{-\lambda t}$ **d)** s^{-1}
2-50) a, b) $y(x) = (y_0 + d/c)\,e^{c(x-x_0)} - d/c$
2-51) b) $v_y(t) = \left(v_{y_0} + \frac{mg}{b}\right)e^{-bt/m} - \frac{mg}{b}$ **c)** $v_y(t) = -\frac{mg}{b}\left(1 - e^{-bt/m}\right)$ **d)** $v_{\mathrm{ter}} = \frac{mg}{b}$
e) $4{,}69\,\mathrm{s}$ e $9{,}39\,\mathrm{s}$ **g)** $y(t) = y_0 + \frac{m}{b}\left(v_{y_0} + \frac{mg}{b}\right)\left(1 - e^{-bt/m}\right) - \frac{mg}{b}\,t$
h) $v_y(t) = \left(v_{y_0} + \frac{mg}{b}\right)e^{-b(t-t_0)/m} - \frac{mg}{b}$, $y(t) = y_0 + \frac{m}{b}\left(v_{y_0} + \frac{mg}{b}\right)\left(1 - e^{-b(t-t_0)/m}\right) - \frac{mg}{b}\,(t - t_0)$

j) Basta trocar "g" por "$-g$". Obtemos:
$v_y(t)=\left(v_{y_0}-\frac{mg}{b}\right)e^{-b(t-t_0)/m}+\frac{mg}{b}$, $\quad y(t)=y_0+\frac{m}{b}\left(v_{y_0}-\frac{mg}{b}\right)\left(1-e^{-b(t-t_0)/m}\right)+\frac{mg}{b}(t-t_0)$
2-52) a) $T(t)=T_{\text{viz}}+(T_0-T_{\text{viz}})e^{-kt}$ **g)** $T(t)=T_{\text{viz}}-(T_{\text{viz}}-T_0)e^{-kt}$ (a mesma expressão para $T(t)$ do item **a**, apenas reescrita de forma mais interessante)
2-53) a) $y(t)=5\cdot 2^{t/4}$ **b)** $y(t)=5\cdot 3^{t/4}$ **c)** $y(t)=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{t/4}=5\cdot 2^{-t/4}$
d) $y(t)=5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{t/4}=5\cdot 3^{-t/4}$ **e)** $y(t)=y_0 b^{t/\tau}$ **f)** $y(t)=y_0 e^{(\ln b)t/\tau}$
g) $n(t)=20000\cdot 2^{t/7\text{d}}$, $\frac{\text{d}n}{\text{d}t}=\left(\frac{\ln 2}{7\text{d}}\right)\cdot 20000\cdot 2^{t/7\text{d}}$, $\left.\frac{\text{d}n}{\text{d}t}\right|_{t=0}=\left(\frac{\ln 2}{7\text{d}}\right)\cdot 20000\approx 1980\,\text{d}^{-1}$
2-54) e) $\tau_{1/2}=\frac{\ln(1/2)}{\ln(1/3)}=\frac{\ln(2)}{\ln(3)}\approx 0{,}631$ e $\tau_{1/4}=\frac{\ln(1/4)}{\ln(1/3)}=\frac{\ln(4)}{\ln(3)}\approx 1{,}26$
2-55) a) $y(x)=A_1 e^{ax}+A_2 e^{-ax}$, em que A_1 e A_2 são constantes arbitrárias.
b) $y(x)=\frac{1}{2}\left(y_0+\frac{y_0'}{a}\right)e^{ax}+\frac{1}{2}\left(y_0-\frac{y_0'}{a}\right)e^{-ax}$
2-58) a) $f'(x)=aA\,\text{sech}^2 ax$ **b)** $f'(x)=aA\left[\cosh^2 ax+\text{senh}^2 ax\right]=aA\left[1+2\,\text{senh}^2 ax\right]$
c) $f'(x)=\frac{\text{senh}\,x}{\cosh x}=\text{tgh}\,x$
2-60) a) $y(x)=y_0\cosh ax+\frac{y_0'}{a}\text{senh}\,ax$ **b)** $y(x)=y_0\cos ax+\frac{y_0'}{a}\text{sen}\,ax$
2-61) $y(x)=y_0\cosh ax+\frac{y_0'}{a}\text{senh}\,ax$
2-63) d) As duas integrais têm o mesmo resultado: $\ln\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}}\right)$ **e)** Respectivamente $\frac{1}{2}\ln 3$ e $\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}$
2-65) d) $f_x=cv_x^2$ $(v_x<0)$. A equação diferencial fica: $\frac{\text{d}v_x}{\text{d}t}=\frac{c}{m}v_x^2$ $(v_x<0)$.
Solução: $v_x(t)=\frac{v_{x0}}{1-\left(\frac{c\,v_{x0}}{m}\right)t}$ $(v_{x0}<0$ e $t\geq 0)$. **e)** $v_x(t)=\frac{v_{x0}}{1+\left(\frac{c|v_{x0}|}{m}\right)t}$ $(t\geq 0)$, $f_x=-cv_x|v_x|$
f) $v_x(t)=\frac{v_{x0}}{1+\left(\frac{c|v_{x0}|}{m}\right)(t-t_0)}$ $(t\geq t_0)$ **h)** $x(t)=x_0+\frac{m}{c}\ln\left(1+\frac{c\,v_{x0}}{m}t\right)$ $(v_{x0}>0$ e $t\geq 0)$,
$x(t)=x_0-\frac{m}{c}\ln\left(1-\frac{c\,v_{x0}}{m}t\right)$ $(v_{x0}<0$ e $t\geq 0)$ **i)** $x(t)=x_0+\frac{v_{x0}}{|v_{x0}|}\frac{m}{c}\ln\left(1+\frac{c|v_{x0}|}{m}t\right)$ $(t\geq 0)$
2-66) h) $y(t)=y_0-\frac{m}{c}\ln\left(\cosh\left(\sqrt{\frac{c}{mg}}gt\right)\right)$
i) $v_y(t)=-\sqrt{\frac{mg}{c}}\,\text{tgh}\left(\sqrt{\frac{c}{mg}}g(t-t_0)\right)$ e $y(t)=y_0-\frac{m}{c}\ln\left(\cosh\left(\sqrt{\frac{c}{mg}}g(t-t_0)\right)\right)$
j) $v_y(t)=\sqrt{\frac{mg}{c}}\,\text{tgh}\left(\sqrt{\frac{c}{mg}}g(t-t_0)\right)$ e $y(t)=y_0+\frac{m}{c}\ln\left(\cosh\left(\sqrt{\frac{c}{mg}}g(t-t_0)\right)\right)$
2-67) a) M tende a $N\mu_B/V$ quando $B_{\text{ext}}\to\infty$ (com a temperatura fixa). Com a remoção do campo externo, a magnetização vai a zero. **b)** Em um sólido ferromagnético, a magnetização não vai a zero com a remoção do campo externo. **c)** com B_{ext} fixo: com um aumento de T, M diminui, e com uma diminuição de T, M aumenta; quando $T\to 0$, $M\to N\mu_B/V$; quando $T\to\infty$, $M\to 0$.
2-70) b) $\cosh x\approx 1+\frac{1}{2}x^2$, para $|x|\ll 1$.
2-71) b) Os gráficos mostram que a aproximação em (224) é uma boa aproximação para valores de x entre -1 e 1, aproximadamente. Perceba que há uma ganho muito interessante com o acréscimo, na aproximação de primeira ordem $\text{sen}\,x\approx x$, do termo cúbico em x.
2-72) b) Os gráficos mostram que a aproximação em (226) é muito boa para valores de x entre $-0{,}5$ e $0{,}5$, aproximadamente. Mas, dependendo da precisão desejada, podemos ir além desse intervalo. Por exemplo, podemos dizer que temos uma aproximação aceitável no intervalo $[-1,1]$.
2-74) a) $(1\pm\varepsilon)^n\approx 1\pm n\varepsilon+\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2\pm\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\varepsilon^3$, com $0<\varepsilon<1$, ε suficientemente próximo de zero (a depender do valor de n, esta aproximação só é boa para $\varepsilon\ll 1$), e $n\notin\{0,1,2,3\}$. Para $n\in\{0,1,2,3\}$, o sinal "$\approx$" deve ser substituído por um sinal de igualdade (e tal igualdade é válida para todo $\varepsilon\in\mathbb{R}$).
d) O erro cometido com o uso da aproximação em (229) para $\sqrt{1\pm\varepsilon}$ é muito pequeno se $0<\varepsilon<0{,}5$, aproximadamente.
2-78) b) Obtemos: $g(x-x_0)\approx g(0)+g'(0)(x-x_0)+\frac{g''(0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{g^{(n)}(0)}{n!}(x-x_0)^n$, para x suficientemente próximo de x_0.
2-79) a) O paramagneto de spin $1/2$ prevê, sim, a lei de Curie: $M\approx\frac{N\mu_B}{V}\frac{\mu_B B_{\text{ext}}}{kT}$, para $\frac{\mu_B B_{\text{ext}}}{kT}\ll 1$. Podemos reescrever: $M\approx C\frac{B_{\text{ext}}}{T}$, com $C=\frac{N\mu_B^2}{kV}$, para $\frac{\mu_B B_{\text{ext}}}{kT}\ll 1$. **b)** Aproximadamente 0,17
2-80) d) $y=y_0+\left(\frac{v_{y0}}{v_{x0}}+\frac{mg}{bv_{x0}}\right)(x-x_0)+\frac{m^2 g}{b^2}\ln\left(1-\frac{b(x-x_0)}{mv_{x0}}\right)$ **e)** Sim, obtemos.
f) Com $b=0$: $R\approx 20{,}4\,\text{m}$ e $y_{\text{max}}\approx 5{,}10\,\text{m}$; com $b=0{,}01\,\text{kg/s}$: $R\approx 17{,}9\,\text{m}$ e $y_{\text{max}}\approx 4{,}78\,\text{m}$; com

$b = 0{,}1\,\text{kg/s}$: $R \approx 8{,}02\,\text{m}$ e $y_{\text{max}} \approx 3{,}11\,\text{m}$; com $b = 1\,\text{kg/s}$: $R \approx 1{,}0\,\text{m}$ e $y_{\text{max}} \approx 0{,}76\,\text{m}$.
h) Se $b \neq 0$ e $v_{x_0} \neq 0$, há na trajetória da partícula uma assíntota vertical de equação $x = x_0 + \frac{mv_{x_0}}{b}$. Observe que se $b \to 0$ (lembrando que b nunca é negativo), então $x \to \infty$ (se $v_{x_0} > 0$) ou $x \to -\infty$ (se $v_{x_0} < 0$), como esperado - já que na ausência de arrasto a trajetória é uma parábola.
i) $R = \frac{2v_{x_0}v_{y_0}}{g}$
k) Com $b = 0{,}01\,\text{kg/s}$: $R \approx 17{,}6\,\text{m}$ (bem perto do que foi obtido no item **f**: $R \approx 17{,}9\,\text{m}$); com $b = 0{,}1\,\text{kg/s}$: $R \approx -7{,}36\,\text{m}$ - o que não faz o menor sentido, é claro; com $b = 1\,\text{kg/s}$: $R \approx -257\,\text{m}$ - o que também não faz o menor sentido. É que apenas no primeiro caso a condição $0 < \frac{bv_{y_0}}{mg} \ll 1$ é satisfeita.
l) $y_{\text{max}} = y_0 + \frac{mv_{y_0}}{b} - \frac{m^2 g}{b^2} \ln\left(1 + \frac{bv_{y_0}}{mg}\right)$ **m)** Sim, correspondem.
2-81) a) $y(x) = (2x+1)^{1/3}$. O maior domínio possível em $\mathbb{R}$, aqui, é o próprio $\mathbb{R}$. Podemos obter funções distintas restringindo o domínio de $y(x)$ a diferentes subconjuntos de $\mathbb{R}$.
b) $y'(x) = \frac{2}{3(2x+1)^{2/3}}$, para $x \neq -\frac{1}{2}$.
2-82) a) $y(x) = (x^2+1)^{1/3}$. O maior domínio possível em $\mathbb{R}$, aqui, é o próprio $\mathbb{R}$. Podemos obter funções distintas restringindo o domínio de $y(x)$ a diferentes subconjuntos de $\mathbb{R}$.
b) $y'(x) = \frac{2x}{3(x^2+1)^{2/3}}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. **d)** $x = \sqrt{3}$
2-83) a) $y(x) = \sqrt{x^3+1}$ ou $y(x) = -\sqrt{x^3+1}$. Nos dois casos, o maior domínio possível em $\mathbb{R}$ é o conjunto D_y dos reais x tais que $x \geq -1$. Podemos obter funções distintas restringindo o domínio de $y(x)$, em cada caso, a diferentes subconjuntos de D_y. **b)** Respectivamente: $y'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$ e $y'(x) = -\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$, para $x > -1$ (nos dois casos).
2-84) b) $\text{C} = \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{2}, \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)$ **c)** $y = -x + \sqrt[3]{2}$ **d)** No ponto A: $y = -\frac{x}{3} + 1$; no ponto B: $y = -3x + 3$
2-85) a) $y = -(\operatorname{cotg}\delta)x + R\operatorname{cossec}\delta$
2-87) b) 3 funções, que denotaremos por $y_1(x)$, $y_2(x)$ e $y_3(x)$, com domínios D_1, D_2 e D_3, respectivamente.
c) $D_1 = \left(0, \frac{4}{e^2}\right]$, $D_2 = \left[0, \frac{4}{e^2}\right]$, $D_3 = [0, \infty)$.
2-91) b) $y'(x) = \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{\left(x^4+\frac{1}{2}\right)^3}\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-x+1} - \frac{12x^3}{x^4+\frac{1}{2}}\right)$, $x \in \mathbb{R}$. Em princípio, esta resposta é suficiente, mas, optando por simplificá-la, podemos obter: $y'(x) = \frac{-44x^5+46x^4-48x^3+2x-1}{4\left(x^4+\frac{1}{2}\right)^4\sqrt{x^2-x+1}}$, $x \in \mathbb{R}$.
2-92) a) $y'(x) = (11x^2 - 8x + 3)(x-1)^2(x^2+1)^3$, $x \in \mathbb{R}$. **b)** Para $x \leq 1$.
2-94) a) $f'(x) = 2^x \ln 2$, $x \in \mathbb{R}$ **b)** $g'(x) = (1 + \ln x)x^x$, $x > 0$ **c)** $h'(x) = -(2\ln 5)x5^{-x^2}$
2-95) Variações relativas percentuais: de 1 g para 2 g: 100%; de 2 g para 3 g: 50%; de 3 g para 4 g: $\approx 33{,}3\%$. Sugestão de compra: a aliança de 3 g, se a satisfação importar mais que a economia, ou a aliança de 2 g, se a economia importar mais que a satisfação.
2-96) b) $16x/(x^4-1)$
2-97) e) Aproximação de segunda ordem para $(\Delta L)/L$: $(\Delta L)/L = \left(e^{\alpha\Delta T} - 1\right) \approx \alpha\Delta T + (\alpha\Delta T)^2/2$, se $|\alpha\Delta T| \ll 1$.
2-98) a) $P(t) = (3\times10^6)e^{(2\,\text{s}^{-1}/100)t}$, $t \geq 0$; $P(1\,\text{s}) = 3{,}06$ milhões, $P(10\,\text{s}) = 3{,}66$ milhões, $P(100\,\text{s}) = 22{,}2$ milhões e $P(500\,\text{s}) = 66{,}1$ bilhões. **b)** $P(t) = (3\times10^6)(1{,}02)^t$, $t = 0, 1, 2, \ldots$; $P(1) = 3{,}06$ milhões, $P(10) = 3{,}66$ milhões, $P(100) = 21{,}7$ milhões e $P(500) = 59{,}9$ bilhões.
2-99) e) $a_x = 6vv_y/(1+36y^2)^{3/2} = 6v^2/(1+36y^2)^2$ e $a_y = -36yvv_y/(1+36y^2)^{3/2} = -36yv^2/(1+36y^2)^2$, no SI. Para o instante em que a partícula passa pelo vértice da parábola da Fig. 24: $a_x = (6\,\text{m}^{-1})v^2$ e $a_y = 0$. **f)** $R = (1/6)\text{m}$ **h)** $|v_x| \approx v$ e $|v_y| \approx 0$, se $|y| \gg (1/6)\text{m}$. Uma primeira aproximação não nula para $|v_y|$ é $|v_y| \approx \frac{v}{(6\,\text{m}^{-1})|y|}$.
2-100) a) $\dot{\theta} = \frac{v_x}{L}\sec\theta$ **c)** $\ddot{\theta} = \left(\frac{v_x}{L}\right)^2 \sec^2\theta\,\operatorname{tg}\theta$
2-104) a) $f'(x) = 3e^x + \frac{2}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ **b)** $f'(x) = 5\sec x\left(\frac{1}{x} + \ln x\,\operatorname{tg} x\right)$, $0 < x \neq \frac{n\pi}{2}$, sendo n um natural ímpar. **c)** $f'(x) = 24\,e^{3x}\cos(2\,e^{3x})$, $x \in \mathbb{R}$ **d)** $f'(x) = -A\,e^{-bx}\left(b\cos(cx+d) + c\operatorname{sen}(cx+d)\right)$, $x \in \mathbb{R}$
e) $f'(x) = \frac{4x\operatorname{sech}^2(\ln(\operatorname{tg} x^2))}{\operatorname{sen} 2x^2}$, $\sqrt{n\pi} < x < \sqrt{n\pi + \pi/2}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
2-105) a) $\frac{7}{3} - 2\ln 2$ **b)** $-\frac{7}{3} - 2\ln 2$ **c)** $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e^4}\right)$

d) $\frac{A}{2n}$, para $n = 1,3,5,\ldots$; 0, para $n = 2,4,6,\ldots$ **e)** $\pi/3$

2-106) a) $a \approx 0{,}16$ **b)** $a = \frac{1}{2\pi} \approx 0{,}16$ **c)** $y = \frac{1}{2}x + 1$

2-107) d) $x(t) = e^{-bt/2m}\left[x_0 \cos\omega t + \frac{1}{\omega}\left(v_{x_0} + \frac{bx_0}{2m}\right)\operatorname{sen}\omega t\right]$, com $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$.

m) Solução (319) em termos de $x_0 \equiv x(0)$ e $v_{x_0} \equiv v_x(0)$:

$$x(t) = -\left[\frac{\left(\beta - \sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right)x_0 + v_{x_0}}{2\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}}\right] e^{-\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right)t} + \left[\frac{\left(\beta + \sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right)x_0 + v_{x_0}}{2\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}}\right] e^{-\left(\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right)t},$$

sendo $\beta = b/2m$ e $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

p) A solução tentativa funciona desde que $b = 2\sqrt{mk}$ - ou seja, desde que o sistema esteja na condição de amortecimento crítico.

q) $x(t) = \left[x_0 + \left(v_{x_0} + \frac{bx_0}{2m}\right)t\right]e^{-bt/2m}$

2-108) b) $m_{\text{ótimo}} = b^2/2k$

2-109) b) Obtemos: $\operatorname{tg} x \approx x + x^3/2$, para $|x| \ll 1$. Não é a melhor aproximação de terceira ordem possível para $\operatorname{tg} x$, porque nela o coeficiente de x^3 é $1/2$, em vez de $1/3$ (compare com (330)).

c) Obtemos: $\operatorname{tg} x \approx x + x^3/3$, para $|x| \ll 1$, que é a melhor aproximação de terceira ordem possível para $\operatorname{tg} x$ (compare com (330)).

2-110) a) $2\,e^{\pi/4} - 3 \approx 1{,}387$ **b)** $e - 2 \approx 0{,}718$ **d)** 1,49365, aproximadamente. **e)** 0,8031, aproximadamente. **f)** 0,3577, aproximadamente.

2-111) e) Em nossa opinião, o uso de discos é conceitualmente mais simples que o uso de cascas cilíndricas coaxiais. Contudo, em termos de facilidade de cálculo, a forma mais simples foi a do item **c**.

2-112) b) $15\pi/2 \approx 23{,}6$ **c)** $163\pi/15 \approx 34{,}1$ (Um volume maior que o do item **b**, como seria de se esperar. Por quê?)

2-113) c) $\theta_{\text{ótimo}} \approx 56{,}47^{\text{o}}$ **e)** $S_{\text{max}} \approx 1{,}20\,S_{\text{v}}$ (Observe que estes dois resultados independem dos valores de v_0 e g (embora S_{v} dependa, é claro).)

Apêndice B

Sumário