

Maximização da produção agrícola em relação à terra e ao capital de inversão na agricultura familiar do município de Águia Branca (ES)

Aldivania Alves Salvador Wernz¹ , Sérgio Drumond Ventura²  e
Angel Ramon Sanchez Delgado² 

- (1) Programa de Pós Graduação em Educação Agrícola (PPGEA- UFRRJ) Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, BR 465, Km. 7, Seropédica, RJ, Brasil, 23851-970
- (2) Departamento de Matemática (DEMAT), Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional (PPGMMC), Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, BR 465, Km. 7, Seropédica, RJ, Brasil, 23851-970

Wernz A. A. S., Ventura S. D., Delgado A. R. S. (2023) Maximização da produção agrícola em relação à terra e ao capital de inversão na agricultura familiar do município de Águia Branca (ES) *Pesquisa e Ensino em Ciências Exatas e da Natureza*, 7(2): e2063 (2023). <https://doi.org/10.56814/pecen.V7i2.2063>

Academic editor: Eudes Leite de Lima. **Received:** 04 September 2023. **Accepted:** 27 november 2023. **Published:** 13 december 2023.

Resumo: Considerando que a agricultura familiar contribui com mais de 40% dos produtos da cesta básica brasileira, e que para o agricultor familiar brasileiro é fundamental conhecer os níveis máximos de produção, apresentamos um procedimento computacional iterativo que em poucas iterações, maximiza a produção em relação à terra e ao capital de inversão, sujeita a certas restrições. O perímetro escolhido para testar o procedimento foi o Município de Águia Branca, ES. É importante destacar que a agricultura familiar é predominante neste município, com cerca de 80% dos agricultores sendo familiares. O procedimento foi implantado para dois cenários na região, um primeiro cenário dos agricultores familiares que tem a disposição uma área de plantio que vai entre 5 e 10 hectares, e um segundo cenário dos produtores que possuem entre 10 e 15 hectares. Café Conilon, Feijão, Milho e Abóbora foram as culturas escolhidas nos dois cenários. Pode-se afirmar que o procedimento demonstrou validade computacional, e que os resultados numéricos se encontram em consonância com as informações fornecidas pelo Programa de Assistência Técnica e Extensão Rural – PROATER-Águia Branca, ES-2020-2023

Palavras-chave: Função produção tipo Cobb-Douglas, barreira logarítmica, cesta básica, validade computacional

Maximization of agricultural production in relation to land and investment capital in family farming in the municipality of Águia Branca (ES)

Abstract: Considering that family farming contributes more than 40% of the products in the Brazilian basic basket, and that for the Brazilian family farmer it is essential to know the maximum production levels, we present an iterative computational procedure that, in a few iterations, maximizes production in relation to land and investment capital, subject to certain restrictions. The perimeter chosen to test the procedure was the Municipality of Águia Branca, ES. It is important to highlight that family farming is predominant in this municipality, with around 80% of farmers being family farmers. The procedure was implemented for two scenarios in the region, a first scenario involving family farmers who have a planting area of between 5 and 10 hectares at their disposal, and a second scenario involving producers who have between 10 and 15 hectares. Conilon Coffee, Beans, Corn and Pumpkin were the crops chosen in both scenarios. It can be stated that the procedure demonstrated computational validity, and that the numerical results are in line with the information provided by the Technical Assistance and Rural Extension Program – PROATER-Águia Branca, ES-2020-2023.

Key words: Cobb-Douglas type production function, logarithmic barrier, basic basket, computational validity.

Introdução

No Brasil, falar sobre a importância da agricultura familiar é algo que chega a ser redundante (Delgado & Ventura, 2019). Muitos dos produtos que chegam à mesa da população brasileira, tanto sob o ponto de vista quantitativo, quanto à diversidade, têm origem na agricultura familiar (Lazzaretti, 2022). A agricultura familiar (AF) é um importante segmento para o desenvolvimento do Brasil, considerando que responde por 37,8% do valor bruto da produção agropecuária (calculado com base no volume da produção e nos preços médios de mercado).

Existem aproximadamente 4,4 milhões de famílias agricultoras, sendo que a metade delas está na Região Nordeste, o que representa 84% dos estabelecimentos rurais brasileiros, e é responsável pela produção de mais de 43% dos alimentos da cesta básica brasileira, representando assim um importante instrumento de controle da inflação. Resumidamente podemos definir AF como a estrutura agrícola composta pelo triplex *família-produção-trabalho*. É importante ressaltar que existe uma diferença social entre AF e a chamada “agricultura patronal”, que separa a gestão da produtividade do trabalho.

A literatura sobre AF (Dutra, 2016; De Oliveira, 2019; Serafim, 2022) sinala que, desde meados da década de 1990, vem ocorrendo um processo de reconhecimento e de criação de instituições de apoio à AF. Foram criadas políticas públicas específicas de estímulo aos agricultores familiares como o Programa Nacional para o Fortalecimento da AF (PRONAF), a secretaria especial de agricultura familiar e do desenvolvimento agrário (SEAD), a promulgação da Lei da AF, que reconhece oficialmente a agricultura familiar como profissão no mundo do trabalho.

Atualmente o maior desafio para o agricultor familiar brasileiro, quiçá seja desenvolver atividades que lhe assegurem renda. Sem renda, não é possível ter acesso aos bens necessários para a sobrevivência das pessoas com condições mínimas de dignidade e, muito menos, aos recursos tecnológicos indispensáveis para assegurar a competitividade do negócio; mais ainda, considerando que uma parte significativa dos agricultores familiares não tem terra ou possuem terras de tamanho insuficiente (Guanziroli et al. 2001), e que nos últimos quatro anos o PRONAF tem sofrido sérias baixas no que respeita ao capital econômico necessário para o financiamento da AF, se faz necessário (nos próximos anos), promover esforços que permitam de forma sustentável a maximização da produção agrícola em relação à terra e ao capital.

O termo função de produção Cobb-Douglas tem sido usado para se referir a uma função de utilidade produtiva multiplicativa simples. Em 1928, Cobb e Douglas publicaram um estudo no qual modelaram o crescimento da economia americana em relação ao trabalho e ao capital durante o período de 1899-1922 (Vaggi et al. 2003). O modelo provou ser muito preciso. Aqui apresenta-se um procedimento computacional que determina uma solução ótima do programa não-linear associado ao problema que será considerado, como também alguns ensaios numéricos utilizando informações emitidas pelo Programa de Assistência Técnica e Extensão Rural – PROATER-Águia Branca, ES-2020.2023 (Do Nascimento, 2000). Nesse trabalho procura-se maximizar a produção agrícola em relação à terra e ao capital de inversão, quantificada através de uma função tipo Cobb-Douglas, e sujeita a certas restrições.

Material e Métodos

A produção será analisada de maneira analítica e quantificada através da função tipo Cobb-Douglas dada por: $y(a, c) = ka^\alpha c^{1-\alpha}$, onde “a” representa a área a ser cultivada por determinada cultura (ha), “c” o capital de inversão (R\$), $k > 0$ ($\frac{kg}{ha^2R\$}$) e $0 < \alpha < 1$, (elasticidade de produção ou contribuição da variável “a” na produção). Desta maneira $y(a, c)$ mede a produção kg por hectare de uma determinada cultura agrícola, e o problema de interesse pode ser modelado matematicamente como o programa não-linear dado por:

$$\begin{aligned}
 (P) \quad & \text{Maximizar} \quad y(a, c) = ka^\alpha c^{1-\alpha} \\
 & \text{Sujeito a:} \quad h(a, c) = c + \sigma_a a \leq c_0 \quad (1) \\
 & \quad \quad \quad a_l \leq a \leq a_u \quad (2) \\
 & \quad \quad \quad c \geq 0 \quad (3)
 \end{aligned}$$

Em que:

σ_a – Custo operacional de um hectare de terra para o cultivo de determinada cultura agrícola (mão de obra, maquinaria, etc.) R\$.ha⁻¹.

c_0 – Capital pré-fixado (R\$).

$0 \leq a_l, a_u$ – Limitantes inferior e superior da área a ser cultivada respectivamente (ha).

Em (P), a restrição (1), impor que o capital (c) mais o custo do trabalho de um hectare de terra (σ_a) vezes a área (a), seja menor ou igual a um capital pré-fixado (c_0). Ele pode estar representando o capital de financiamento necessário para o desenvolvimento da cultura. Considerando que $c_0 \geq c + \sigma_a a \geq \sigma_a a \geq \sigma_a a_l$, podemos supor que $c_0 > \sigma_a a_l$. Já a restrição (2) impor que a variável área seja limitada inferior e superiormente, e a restrição (3) a não-negatividade da varável capital. Observando que em (P):

$$\text{Maximizar } y(a, c) \approx \text{Maximizar } \text{Ln } y(a, c) = f(a, c)$$

Procura-se então:

$$\begin{aligned}
 (P)_{Ln} \quad & \text{Maximizar } f(a, c) = \beta + \alpha \text{Ln } a + (1 - \alpha) \text{Ln } c \\
 & \text{Sujeito:} \quad c + \sigma_a a \leq c_0 \\
 & \quad \quad \quad a_l \leq a \leq a_u \\
 & \quad \quad \quad c \geq 0
 \end{aligned}$$

em que $\beta = \text{Ln } k$.

Note que o problema $(P)_{Ln}$ é um problema de programação não linear com restrições lineares, onde a função objetivo $f(a, c) = \beta + \alpha \text{Ln } a + (1 - \alpha) \text{Ln } c$ é estritamente côncava no conjunto de soluções viáveis: $S = \{(a, c) \in \mathbb{R}^2: c + \sigma_a a \leq c_0, a_l \leq a \leq a_u, c \geq 0\}$. Portanto existe uma única solução ótima do problema $(P)_{Ln}$, que procuramos determinar de forma aproximada utilizando um procedimento computacional baseado em no método barreira logarítmica (Bazaraa, et al., 1993, Bertsekas 2004). Inicialmente suponha dado um parâmetro $\mu > 0$ e associemos a $(P)_{Ln}$ a função estritamente côncava:

$$\varphi_\mu(a, c) = f(a, c) + \mu[\text{Ln}(a - a_l) + \text{Ln}(a_u - a) + \text{Ln}(c) + \text{Ln}(c_0 - c + \sigma_a a)].$$

Agora procura-se resolver o programa não-linear irrestrito:

$$\text{Maximizar } \varphi_{\mu}(a, c) \quad (*)$$

Em seguida, faz-se decréscimo de μ e o processo é repetido até que um critério de parada seja satisfeito. O nome barreira logarítmico deve-se ao fato de que a função logaritmo obriga o procedimento a gerar pontos interiores afastados da fronteira de S . Para cada μ , o máximo de $\varphi_{\mu}(a, c)$ é alcançado em um ponto interior do conjunto de soluções viáveis do problema, e quando μ tende a zero, esse ponto move-se até um ponto próximo da solução ótima do problema (P). Como função de μ , o conjunto de soluções ótimas dos problemas não lineares (*), fornece uma curva denominada de Trajetória Central. O importante da metodologia é a maximização de $\varphi_{\mu}(a, c)$ para cada μ fixo, mas como $\varphi_{\mu}(a, c)$ é uma função estritamente côncava, pelas condições de primeira ordem, $(a, c) = (a(\mu), c(\mu))$ resolve (*), se e somente se $\nabla\varphi_{\mu}(a, c) = 0$. Isto é:

$$\frac{\partial\varphi_{\mu}(a, c)}{\partial a} = \frac{\alpha}{a} + \frac{\mu}{a-a_l} - \frac{\mu}{a_u-a} - \frac{\mu\sigma_a}{c_0-h(a, c)} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial\varphi_{\mu}(a, c)}{\partial c} = \frac{(1-\alpha)}{c} + \frac{\mu}{c} - \frac{\mu}{c_0-h(a, c)} = 0 \quad (5)$$

Fazendo: $z_{\mu}^{a_l} = \frac{\mu}{a-a_l}$; $z_{\mu}^{a_u} = \frac{\mu}{a_u-a}$; $z_{\mu}^c = \frac{\mu}{c}$; $\theta_{\alpha}^a = \frac{\alpha}{a}$; $\theta_{\alpha}^c = \frac{(1-\alpha)}{c}$; $z_{\mu}^h = \frac{\mu}{c_0-h(a, c)}$.
Agora o sistema (4)-(5) pode ser escrito como:

$$\theta_{\alpha}^a + z_{\mu}^{a_l} - z_{\mu}^{a_u} - \sigma_a z_{\mu}^h = 0 \quad (6)$$

$$\theta_{\alpha}^c + z_{\mu}^c - z_{\mu}^h = 0 \quad (7)$$

$$a\theta_{\alpha}^a = \alpha \quad (8)$$

$$c\theta_{\alpha}^c = (1 - \alpha) \quad (9)$$

$$z_{\mu}^{a_l}(a - a_l) = \mu \quad (10)$$

$$z_{\mu}^{a_u}(a_u - a) = \mu \quad (11)$$

$$cz_{\mu}^c = \mu \quad (12)$$

$$z_{\mu}^h(c_0 - h(a, c)) = \mu \quad (13)$$

Em que: $a, c, z_{\mu}^{a_l}, z_{\mu}^{a_u}, z_{\mu}^c, z_{\mu}^h, \theta_{\alpha}^a, \theta_{\alpha}^c > 0$

Note que (6)-(13) representa um sistema de equações não lineares que podemos resolver utilizando o método de Newton, onde iterativamente precisa-se da chamada direção Newton-Raphson $(\Delta a, \Delta c, \Delta z_{\mu}^{a_l}, \Delta z_{\mu}^{a_u}, \Delta z_{\mu}^c, \Delta z_{\mu}^h, \Delta\theta_{\alpha}^a, \Delta\theta_{\alpha}^c)$ tal que: $(a + \Delta a, c + \Delta c, z_{\mu}^{a_l} + \Delta z_{\mu}^{a_l}, z_{\mu}^{a_u} + \Delta z_{\mu}^{a_u}, z_{\mu}^c + \Delta z_{\mu}^c, z_{\mu}^h + \Delta z_{\mu}^h, \theta_{\alpha}^a + \Delta\theta_{\alpha}^a, \theta_{\alpha}^c + \Delta\theta_{\alpha}^c)$ satisfaça (6)-(13); isto é:

$$(\theta_{\alpha}^a + \Delta\theta_{\alpha}^a) + (z_{\mu}^{a_l} + \Delta z_{\mu}^{a_l}) - (z_{\mu}^{a_u} + \Delta z_{\mu}^{a_u}) - \sigma_a(z_{\mu}^c + \Delta z_{\mu}^c) = 0$$

$$(\theta_{\alpha}^c + \Delta\theta_{\alpha}^c) + (z_{\mu}^c + \Delta z_{\mu}^c) - (z_{\mu}^h + \Delta z_{\mu}^h) = 0$$

$$(a + \Delta a)(\theta_{\alpha}^a + \Delta\theta_{\alpha}^a) = \alpha$$

$$(c + \Delta c)(\theta_{\alpha}^c + \Delta\theta_{\alpha}^c) = (1 - \alpha)$$

$$(z_{\mu}^{a_l} + \Delta z_{\mu}^{a_l})(a + \Delta a - a_l) = \mu$$

$$(z_{\mu}^{a_u} + \Delta z_{\mu}^{a_u})(a_u - a - \Delta a) = \mu$$

$$(z_\mu^c + \Delta z_\mu^c)(c + \Delta c) = \mu$$

$$(z_\mu^h + \Delta z_\mu^h)(c_0 - h(a, c) - \Delta c - \sigma_a \Delta a) = \mu$$

Assim que:

$$\Delta \theta_\alpha^a + \Delta z_\mu^{a_l} - \Delta z_\mu^{a_u} - \sigma_a \Delta z_\mu^h = \sigma_a z_\mu^h - \theta_\alpha^a - z_\mu^{a_l} + z_\mu^{a_u} = g_1$$

$$\Delta \theta_\alpha^c + \Delta z_\mu^c - \Delta z_\mu^h = -\theta_\alpha^c - z_\mu^c + z_\mu^h = g_2$$

$$a \Delta \theta_\alpha^a + \theta_\alpha^a \Delta a = \alpha - a \theta_\alpha^a = g_3$$

$$c \Delta \theta_\alpha^c + \theta_\alpha^c \Delta c = (1 - \alpha) - c \theta_\alpha^c = g_4$$

$$z_\mu^{a_l} \Delta a + (a - a_l) \Delta z_\mu^{a_l} = \mu - z_\mu^{a_l} (a - a_l) = g_5$$

$$-z_\mu^{a_u} \Delta a + (a_u - a) \Delta z_\mu^{a_u} = \mu - (a_u - a) z_\mu^{a_u} = g_6$$

$$z_\mu^c \Delta c + c \Delta z_\mu^c = \mu - c z_\mu^c = g_7$$

$$-\sigma_a z_\mu^h \Delta a - z_\mu^h \Delta c + (c_0 - h(a, c)) \Delta z_\mu^h = \mu - (c_0 - h(a, c)) z_\mu^h = g_8$$

Matricialmente o sistema linear anterior pode ser escrito como:

$$A \begin{pmatrix} \Delta a \\ \Delta c \\ \Delta z_\mu^{a_l} \\ \Delta z_\mu^{a_u} \\ \Delta z_\mu^c \\ \Delta z_\mu^h \\ \Delta \theta_\alpha^a \\ \Delta \theta_\alpha^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \\ g_6 \\ g_7 \\ g_8 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Em que A é a matriz 8x8 dada por:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -\sigma_a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ \theta_\alpha^a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & \theta_\alpha^c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ z_\mu^{a_l} & 0 & (a - a_l) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -z_\mu^{a_u} & 0 & 0 & (a_u - a) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_\mu^c & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_a z_\mu^h & -z_\mu^h & 0 & 0 & 0 & (c_0 - h(a, c)) & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Seguidamente apresentamos o procedimento implementado na plataforma MATLAB 4.0 para resolver (P).

PROCEDIMENTO

DADOS:

$$k = 1,01; 0 < \alpha < 1; \sigma_a > 0; a_u > a_l > 0; c_0 > \sigma_a a_l, \\ a = \frac{a_u + a_l}{2}; c > 0; \mu_0 > 0; \tau, \delta, \varepsilon_i \in (0,1) \text{ para } i = 1,2.$$

FAZER $\mu = \mu_0$ e calcular $z_\mu^{a_l}, z_\mu^{a_u}, z_\mu^c, z_\mu^h, \theta_\alpha^a, \theta_\alpha^c$

ENQUANTO não achar a solução ótima FAZER

$$\text{Sejam } \vartheta_1 = |\theta_\alpha^a + z_\mu^{a_l} - z_\mu^{a_u} - \sigma_a z_\mu^h|; \vartheta_2 = |\theta_\alpha^c + z_\mu^c - z_\mu^h|;$$

$$\mu = \frac{\tau}{6} [(a\theta_\alpha^a - \alpha) + c\theta_\alpha^c - (1 - \alpha) + z_\mu^{a_l}(a - a_l) + z_\mu^{a_u}(a_u - a) + cz_\mu^c + z_\mu^h(c_0 - h(a, c))] \\ \text{SE } \mu < 10^{-4} \text{ e } \vartheta_i < \varepsilon_i, \text{ para } i = 1,2$$

ENTÃO PARE, a solução encontrada é ótima;

FIM SE AVALIAR $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8$

DETERMINE A DIREÇÃO NEWTON - RAPHSON

ACHAR $(\Delta a, \Delta c, \Delta z_\mu^{a_l}, \Delta z_\mu^{a_u}, \Delta z_\mu^c, \Delta z_\mu^h, \Delta \theta_\alpha^a, \Delta \theta_\alpha^c)$ tal que (14) seja satisfeito

DETERMINE O TAMANHO DO PASSO

$$\beta_a = \frac{1}{\max\{1, -\frac{\Delta a}{\delta a}\}}; \beta_c = \frac{1}{\max\{1, -\frac{\Delta c}{\delta c}\}}; \beta_z^{a_l} = \frac{1}{\max\{1, -\frac{\Delta z_\mu^{a_l}}{\delta z_\mu^{a_l}}\}}; \beta_z^{a_u} = \frac{1}{\max\{1, -\frac{\Delta z_\mu^{a_u}}{\delta z_\mu^{a_u}}\}}; \\ \beta_z^c = \frac{1}{\max\{1, -\frac{\Delta z_\mu^c}{\delta z_\mu^c}\}}; \beta_z^h = \frac{1}{\max\{1, -\frac{\Delta z_\mu^h}{\delta z_\mu^h}\}}; \beta_\theta^a = \frac{1}{\max\{1, -\frac{\Delta \theta_\alpha^a}{\delta \theta_\alpha^a}\}}; \beta_\theta^c = \frac{1}{\max\{1, -\frac{\Delta \theta_\alpha^c}{\delta \theta_\alpha^c}\}}$$

ATUALIZAR A SOLUÇÃO

$$a = a + \beta_a \Delta a; c = c + \beta_c \Delta c; z_\mu^{a_l} = z_\mu^{a_l} + \beta_z^{a_l} \Delta z_\mu^{a_l}; z_\mu^{a_u} = z_\mu^{a_u} + \beta_z^{a_u} \Delta z_\mu^{a_u};$$

$$z_\mu^c = z_\mu^c + \beta_z^c \Delta z_\mu^c; z_\mu^h = z_\mu^h + \beta_z^h \Delta z_\mu^h; \theta_\alpha^a = \theta_\alpha^a + \beta_\theta^a \Delta \theta_\alpha^a; \theta_\alpha^c = \theta_\alpha^c + \beta_\theta^c \Delta \theta_\alpha^c$$

FIM ENQUANTO

O perímetro escolhido para testar o procedimento anterior foi o Município de Águia Branca, Espírito Santo. Águia Branca está localizado a 159 metros de altitude, e tem as seguintes coordenadas geográficas: Latitude: 18° 58' 46" Sul, Longitude: 40° 43' 60" Oeste de Greenwich, na região Noroeste do estado do Espírito Santo, a 219 km de sua capital, Vitória. O município ocupa uma área de 450,40 km², limitando-se com os municípios de Barra de São Francisco, Nova Venécia, São Gabriel da Palha, São Domingos do Norte, Pancas e Mantenópolis. Está inserido na Bacia Hidrográfica do Rio Doce. Ainda de acordo com os dados fornecidos pelo IBGE em 2022, o município, contava com uma população total de 9.711 habitantes, sendo que 68% da população total habitavam suas áreas rurais. Analisando a população residente no meio rural, em Águia Branca existe um percentual de 46,84% de mulheres rurais, sendo que a população feminina

é de 3.030 e a masculina de 3.438. A predominância é de pessoas dentro da faixa etária de 30 aos 59 anos. Aproximadamente 43,90% da população do município está ocupada em atividades agropecuária. A predominância da Agricultura no município é a familiar, sendo que dos estabelecimentos, cerca de 77,99% são de Agricultores Familiares. As principais atividades econômicas do município de Águia Branca concentram-se em seu setor agropecuário, sendo que as principais atividades rurais, agrícolas e não agrícolas são: café, cacau, pimenta do reino, banana e manga, feijão, milho, mandioca, abóbora, cana-de-açúcar (Censo Agropecuário 2017). Para testar a validade numérica e efetividade computacional do procedimento apresentado, foram escolhidas as culturas agrícolas: Feijão (*Phaseolus vulgaris*), Milho (*Zea mays*), Abóbora (*Cucurbita pepo* L) e Café conilon (*Coffea canephora*). O café tem grande destaque e está presente em praticamente todo o município, sendo o pilar principal do setor agropecuário aguiabranquense. As demais culturas são importantes fontes de alimento e atuam na sua maioria como atividades de subsistência. O cacau (*Theobroma cacao*) e a pimenta do reino (*Piper nigrum*) são culturas emergentes e tem ganhado importância nos últimos anos na busca pela diversificação e sustentabilidade econômica das propriedades rurais.

Considerando que em geral, uma parte significativa dos agricultores familiares possuem pequenas áreas de terras para o cultivar, nesse trabalho serão tratados dois cenários: Um primeiro dos agricultores familiares que tem a disposição uma área de plantio que vai entre 5 e 10 hectare e um segundo entre 10 e 15 hectares. Com dados do Programa de Assistência Técnica e Extensão Rural – PROATER-Águia Branca, ES-2020, a Quadro 1 apresenta informações referentes ao custo de produção de um hectare de terra (mão de obra, maquinaria, etc.) de cada cultura considerada, e a produtividade média por hectare conhecida.

QUADRO 1. Custo de produção estimado (R\$) e produtividade média (kg) por hectare (ha) para cada cultura considerada. **Fonte:** PROATER-Águia Branca (ES)-2020-2023.

Cultura	Custo de produção estimado por hectare	Produtividade média por hectare
Feijão	R\$ 12.000	1.550 kg - 2.000 kg
Milho	R\$ 10.000	4.000 kg - 4.500 kg
Abóbora	R\$ 8.500	15.000 kg - 18.000 kg
Café Conilon	R\$ 28.000	3.600 kg - 4.800 kg

Já na Quadro 2, encontram-se os respectivos valores dos parâmetros: custo operacional de um hectare de terra para o cultivo de determinada cultura agrícola (mão de obra, maquinaria, etc.) R\$.ha⁻¹ limitantes inferior e superior da área a ser cultivada respectivamente (ha) e capital pré-fixado (R\$).

QUADRO 2: Informações referentes a dois grupos familiares agrícolas do município de Águia Branca (ES). O primeiro grupo dispõe entre 5 e 10 *ha* para o cultivar, já o segundo, dispõe uma área entre 10 e 15 *ha*.

Culturas	σ_a (R\$ <i>ha</i> ⁻¹)	a_l (<i>ha</i>)	a_u (<i>ha</i>)	$c_0 > \sigma_a a_l$ (R\$)
Feijão	12.000	5	10	180x10 ³
	12.000	10	15	300x10 ³
Milho	10.000	5	10	150x10 ³
	10.000	10	15	250x10 ³
Abóbora	8.500	5	10	128x10 ³
	8.500	10	15	212.500
Café Conilon	28.000	5	10	280.000
	28.000	10	15	560.000

Resultados e Discussão

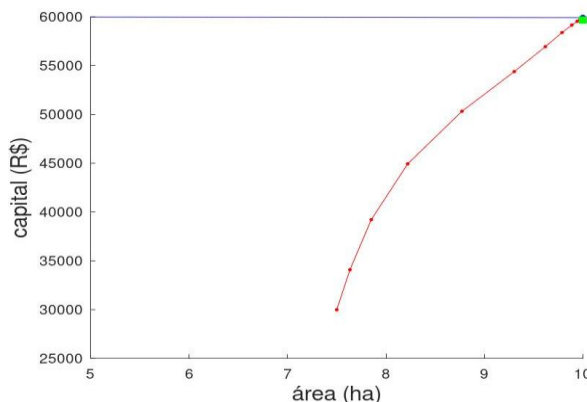
Em primeiro lugar é importante informar que para todas as culturas e ensaios numéricos realizados, foram necessárias 16 iterações para o procedimento iterativo apresentado alcançar uma solução ótima do programa não-linear (P). A Quadro 3 mostra os resultados ótimos obtidos para a cultura do Feijão.

QUADRO 3: Área a ser plantada, capital a ser investido e produção máxima da cultura do Feijão, para cada cenário e ensaio aleatório da elasticidade de produção ($0 < \alpha < 1$).

Cenários	$0 < \alpha < 1$	a (<i>ha</i>)	c (R\$)	Produção Máxima (<i>kg ha</i> ⁻¹)
5-10 <i>ha</i>	0,330	10	59.877,052	1.960,973
	0,340	10	59.877,008	1.804,910
	0,350	10	59.876,962	1.661,266
	0,360	10	59.876,915	1.529,054
10-15 <i>ha</i>	0,410	15	119.813,313	1.874,595
	0,420	15	119.813,202	1.722,262
	0,430	15	119.813,086	1.582,309

No primeiro cenário (5-10 *ha*), a elasticidade de produção varia entre 33% e 36%. É bom lembrar que economicamente este percentual representa a contribuição da variável área (a) na função de produção tipo Cobb-Douglas do programa não-linear (P). Nesse caso a área ótima coincide com o limitante superior da variável área ($a_u = 10$ *ha*) e o capital de inversão ótimo c , foi de R\$ 59.877,052. Note que a produção ótima varia entre 1.529,054 *kg ha*⁻¹ e 1.960,973 *kg ha*⁻¹, bem dentro da produtividade média para a cultura do Feijão da PROATER-Águia Branca, que varia entre 1.500 *kg ha*⁻¹ e 2.000 *kg ha*⁻¹ (Tabela 1). Observe que neste cenário a restrição $c + \sigma_a a \leq c_0$ é satisfeita. Já no segundo cenário (10-15 *ha*), a elasticidade de produção varia entre 41% e 43%, e a área ótima coincide com o limitante superior da variável área ($a_u = 15$ *ha*). Também, o capital de inversão ótimo c , foi de aproximadamente R\$ 120.000. A produção

ótima varia entre 1.582 kg ha^{-1} e 1.874 kg ha^{-1} , e novamente dentro da produtividade média da PROATER-Águia Branca. Neste cenário também a restrição $c + \sigma_a a \leq c_0$ é satisfeita. A Figura 1 mostra a Trajetória Central seguida iterativamente pelo procedimento no interior da região de viabilidade S , até



convergir à solução ótima do problema (P) para a cultura do Feijão.

FIGURA 1: Sequência de pontos no interior da região de viabilidade S gerada pelo procedimento, convergindo à solução ótima do problema (P) no primeiro cenário da cultura do Feijão.

O Quadro 4 mostra os resultados ótimos obtidos para a cultura do Milho. Nesta experiência foram realizados dois ensaios numéricos, um com 22% de elasticidade de produção no cenário 5-10 ha , e um com 30% de elasticidade de produção no cenário 10-15 ha . No primeiro cenário a área ótima coincide com o limitante superior da variável área ($a_u = 10 \text{ ha}$) e o capital ótimo a ser investido c , foi de aproximadamente R\$ 50.000. Neste caso obteve-se uma produção máxima de $4.235,348 \text{ kg ha}^{-1}$ por hectare, dentro da produtividade média para a cultura do Milho da PROATER-Águia Branca, que varia entre 4.000 kg ha^{-1} e 4.500 kg ha^{-1} (Tabela 1).

Cenários	$0 < \alpha < 1$	$a \text{ (ha)}$	$c \text{ (R\$)}$	Produção Máxima (kg ha^{-1})
5-10 ha	0,220	10	49.897,886	4.235,348
10-15 ha	0,300	15	99.845,290	4.191,498

QUADRO 4: Área a ser plantada, capital a ser investido e produção máxima da cultura do Milho, para cada cenário e ensaio aleatório da elasticidade de produção ($0 < \alpha < 1$).

No segundo cenário a área ótima coincide com o limitante superior da variável área ($a_u = 15 \text{ ha}$), e o capital ótimo a ser investido c , foi de R\$ 99.845,290. Já a produção máxima foi de $4.191,498 \text{ kg ha}^{-1}$, novamente dentro da média de produção da PROATER-Águia Branca.

A Figura 2 mostra a Trajetória Central seguida iterativamente pelo procedimento no interior da região de viabilidade S , até convergir à solução ótima do problema (P) para a cultura do Milho.

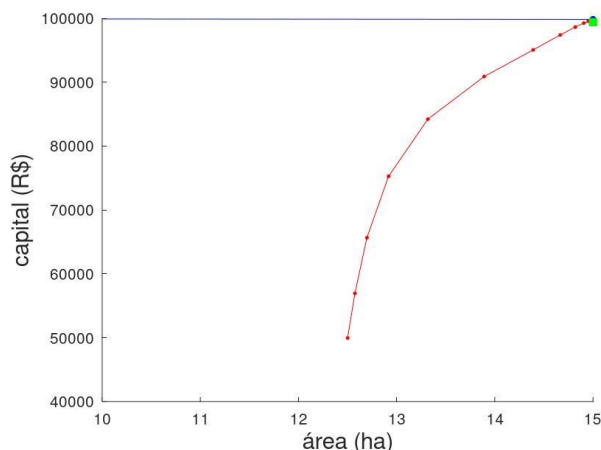


FIGURA 2: Sequência de pontos no interior da região de viabilidade S gerada pelo procedimento, convergindo à solução ótima do problema (P) no segundo cenário da cultura do milho.

O Quadro 5 mostra os resultados ótimos obtidos para a cultura da Abóbora. Nesta experiência numérica com Abóbora e no primeiro cenário, foram realizados dois ensaios numéricos e testado o caso em que praticamente não exista nenhuma contribuição por parte da variável área na função de produção tipo Cobb-Douglas; isto é, onde a elasticidade de produção é quase 0%.

QUADRO 5: Área a ser plantada, capital a ser investido e produção máxima da cultura Abóbora, para cada cenário e ensaio aleatório da elasticidade de produção ($0 < \alpha < 1$).

Cenários	$0 < \alpha < 1$	a (ha)	c (R\$)	Produção Máxima ($kg\ ha^{-1}$)
5-10 ha	0,030	9,999	42.413.611	16.892.343
	0,040	9,999	42.413.579	15.601.677
10-15 ha	0,110	14,999	84.869.353	17.533.189
	0,120	14,999	84.869.316	16.164.060

Em ambos ensaios a área ótima foi de 9,999 ha e o capital ótimo de inversão de R\$ 42.413.611. Novamente as produções máximas alcançadas de $16.892\ kg\ ha^{-1}$ e $15.601\ kg\ ha^{-1}$ respectivamente, entram nas estimativas da PROATER-Águia Branca (Tabela 1). No segundo cenário consideramos um levíssimo aumento da elasticidade de produção nos dois ensaios realizados. A área e o capital de inversão ótimo foram os mesmos em ambos ensaios, 14,999 ha e R\$ 84.869 respectivamente. Ressaltamos que neste cenário e primeiro ensaio, se alcança a máxima produtividade de Abóbora entre todos os cenários, $17.533\ kg\ ha^{-1}$. A Figura 3 mostra a Trajetória Central seguida iterativamente pelo procedimento no interior da região de viabilidade S , até convergir à solução ótima do problema (P) para a cultura Abóbora.

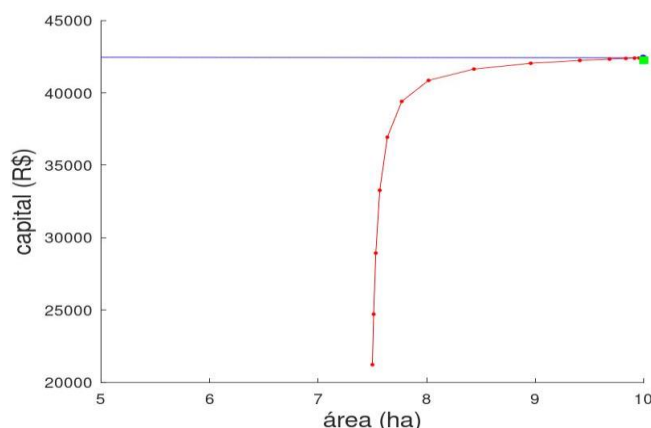


FIGURA 3: Sequência de pontos no interior da região de viabilidade S gerada pelo procedimento, convergindo à solução ótima do problema (P) no primeiro cenário da cultura Abóbora.

O Quadro 6 mostra os resultados ótimos obtidos para a cultura do Café Conilon. Para esta cultura foram realizados seis ensaios numéricos com elasticidade de produção Cobb-Douglas entre 30% e aproximadamente 40%. A produção máxima obtida entra na ordem de produção média informada pelo PROATER-Águia Branca, ES-2020.2023, e novamente são satisfeitas as restrições do problema (P).

QUADRO 6: Área a ser plantada, capital a ser investido e produção máxima da cultura do Café conilon, para cada cenário e ensaio aleatório da elasticidade de produção ($0 < \alpha < 1$).

Cenários	$0 < \alpha < 1$	a (ha)	c (R\$)	Produção Máxima ($kg\ ha^{-1}$)
5-10 ha	0,300	10	139.712,359	4.550,973
	0,310	10	139.712,251	4.153,442
	0,320	10	139.712,139	3.790,637
10-15 ha	0,370	15	279.563,038	4.487,092
	0,380	15	279.562,767	4.087,683
	0,390	15	279.562,489	3.723,826

A Figura 4 mostra a Trajetória Central seguida iterativamente pelo procedimento no interior da região de viabilidade S , até convergir à solução ótima do problema (P) para a cultura Café Conilon.

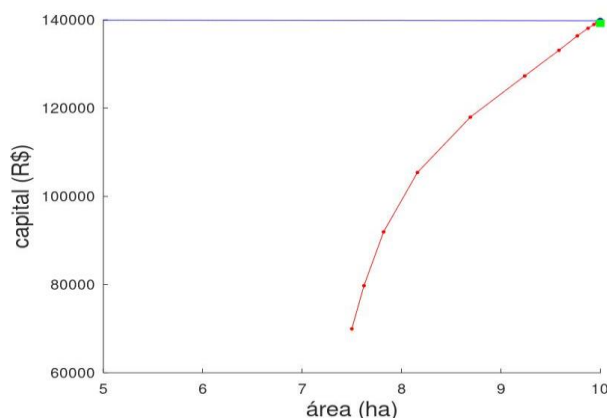


FIGURA 4: Sequência de pontos no interior da região de viabilidade S gerada pelo procedimento, convergindo à solução ótima do problema (P) no primeiro cenário da cultura do Café Conilon.

Conclusões

Os resultados numéricos obtidos no estudo apresentado em relação à determinação de soluções ótimas de programas não-lineares com restrições associados à maximização da produção do agricultor familiar no Município de Águia Branca (ES), em relação à terra e ao capital de inversão, para as culturas agrícolas: feijão, milho, abóbora e café conilon, são satisfatórios, se comparamos as produções ótimas alcançadas para cada cultura com as produções médias conhecidas no programa de assistência técnica e extensão rural-PROATER-Águia Branca, ES-2020-2023. Mais ainda, considerando que para todas as culturas e ensaios numéricos realizados nesta primeira experiência computacional, só foram necessárias 16 iterações do procedimento iterativo desenvolvido e baseado no método barreira logarítmica, pode-se afirmar ter alcançado um programa computacional simples que permite prestar orientação ao agricultor familiar em relação a produções ótimas das culturas agrícolas a ser cultivadas.

Referências Bibliográficas

- Bertsekas, D.P (2004). *Nonlinear Programming*. Belmont: Ed. Athena Scientific, 780 p.
- Bittencourt, G. A. & Abramovay, R (2003). Inovações institucionais no financiamento à agricultura familiar: o Sistema Cresol. *Revista Economia Ensaio*, vol.16, n.1.
- Costa, B. A. L., Amorim Junior, P. C. G., da Silva, M. G (2015). As cooperativas de agricultura familiar e o mercado de compras governamentais em Minas Gerais, *Revista de Economia e Sociologia Rural*, vol. 53, n. 1, 109-126.
- Do Nascimento Tigre, E., et al. (2020), Programa de Assistência Técnica e Extensão Rural – PROATER-Águia Branca, ES-2020-2023, ICAPER Edições, 51p.
- Guanziroli, C. E., Buainain, A., Sabbato (2013), A. Family farming in Brazil: evolution between the 1.996 and 2.006 agricultural censuses. *The Journal of Peasant Studies*, 40: 5, 817-843.
- Guanziroli, C. E, Basco C. A (2009). Construcción de políticas agrarias en Brasil: el caso del PRONAF (Programa de Fortalecimiento de la Agricultura Familiar). *Agenda Social*. v.3, n.3, 69-91.
- Mendanha, J. F., Costa, K. G (2021). Pensando sobre agroecologia e agricultura familiar. *Revista Agricultura Familiar*, v.15, n.2, 9-32.
- Schneider, S (2003). Teoria social, agricultura familiar e pluriatividade. *Revista Brasileira de Ciências Sociais*, v. 18, n. 51, 99-121.
- Turpin, M. E (2009). A alimentação escolar como fatos de desenvolvimento local por meio do apoio aos agricultores familiares. Segurança Alimentar e Nutricional. *Revista do Núcleo e Pesquisa em Alimentação*, v. 16, n. 2, 20-42.