Pesquisa e Ensino em Ciências Exatas e da Natureza
Centro de Formação de Professores / Universidade Federal de Campina Grande

Pesquisa e Ensino em Ciências Exatas e da Natureza
6: 1865 (2022)
Research and Teaching in Exact and Natural Sciences

ARTIGO

ISSN 2526-8236 (edição online)
Pesquisa e Ensino em Ciências Exatas e da Natureza

Maximização da utilidade produtiva dos insumos agrícolas água e nitrogênio utilizando Cobb-Douglas

Angel Ramon Sanchez Delgado[1,2] & Sergio Drumond Ventura[2]

(1) Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Programa de Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional, Rodovia BR 465, Km 07, Zona Rural, Seropédica 23897-000, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: asanchez@ufrrj.br

(2) Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Rodovia BR 465, Km 07, Zona Rural, Seropédica 23897-000, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: ventura@ufrrj.br

Delgado A.R.S. & Ventura S.D. (2022) Maximização da utilidade produtiva dos insumos agrícolas água e nitrogênio utilizando Cobb-Douglas. *Pesquisa e Ensino em Ciências Exatas e da Natureza*, 6: e1865. http://dx.doi.org/10.29215/pecen.v6i0.1865

Editor acadêmico: Paulo Xavier Pamplona. **Recebido**: 15 setembro 2021. **Aceito**: 01 fevereiro 2022. **Publicado**: 12 fevereiro 2022.

Resumo: Apresenta-se um procedimento computacional que maximiza a utilidade produtiva dos insumos agrícolas limitados água e nitrogênio com custo fixo, utilizando uma função Cobb-Douglas, e baseado em uma metodologia híbrida entre barreira logarítmica e Lagrange. O procedimento foi testado utilizando informações conhecidas na literatura da hortense alface e do fruteiro meloeiro. Os resultados obtidos respondem ao esperado de uma função tipo Cobb-Douglas com retornos constantes à escala, mostrando consistência numérica.

Palavras chave: Lâmina de água, dose de nitrogênio, utilidade produtiva de insumos.

Maximizing the productive utility of agricultural inputs water and nitrogen using Cobb-Douglas

Abstract: We present a computational procedure that maximizes the productive utility of agricultural inputs limited to water and nitrogen at fixed costs, using a Cobb-Douglas function, and based on a hybrid methodology between logarithmic barrier and Lagrange. The procedure was tested using information known in the literature on lettuce and the melon fruit tree. The results obtained respond to the expected of a Cobb-Douglas function with constant returns to scale, showing numerical consistency.

Key words: Water depth, nitrogen dose, productive use of inputs.

Introdução

Considerando que os insumos água e nitrogênio são fundamentais no desenvolvimento de culturas agrícolas, e que seu manejo racional é imperativo na otimização da produção, surge a necessidade de conhecer qual é o grau (quantitativamente) de utilidade máxima que a combinação destes dois insumos tem sobre a produção de uma determinada cultura.

A água é fator limitante na produção, e tanto a falta quanto o excesso afetam o crescimento e sanidade das plantas. A irrigação é uma prática agrícola cujo propósito é manter adequado o estado hídrico das plantas para assegurar desenvolvimento, produtividade e rentabilidade econômica (Pires *et al.* 2001).

Em regiões áridas ou semiáridas e também em regiões úmidas, a irrigação com déficit depende da utilização racional dos recursos. A maioria das culturas possui períodos críticos, durante as quais o suprimento inadequado de água causa reduções na produção e alterações no desenvolvimento das culturas. Segundo English & Raja (1996) lâminas excessivas de água além de carregar mais custos na produção, também são prejudiciais por reduzirem o rendimento da cultura; por outro lado, lâminas insuficientes expõe a cultura a condições de deficiência hídrica, reduzindo seu potencial produtivo.

Nos últimos quarenta anos, a literatura tem mostrado que em certas circunstâncias, as economias do déficit de irrigação se encontram na eficiência da irrigação aumentada, nos custos reduzidos de irrigação e nos custos oportunos da água. Adicionalmente, uma decisão que usa menos água pode permitir ao produtor reduzir o capital e outros custos fixos.

Outro fator importante para um bom rendimento de uma cultura é a quantidade adequada de nutrientes durante o ciclo. O nitrogênio desempenha importante função no metabolismo e na nutrição da cultura, e a sua deficiência pode causar desordem nutricional. Conforme Lopes & Guilherme (2000), o nitrogênio é um nutriente essencial para vida vegetal pois é constituinte da estrutura do protoplasma da célula, da molécula da clorofila, dos aminoácidos, das proteínas e de várias vitaminas, além de influenciar as reações metabólicas da planta. Klar (1988) afirma que a fertilidade do solo, em particular, promove uma maior eficiência de uso da água pelas culturas, sendo o nitrogênio um dos nutrientes que promove expressiva variação na eficiência do uso da água pelas culturas. Segundo Lopes & Guilherme (2000), quando o rendimento de uma cultura aumenta com a adubação, a eficiência do uso da água pela cultura também aumenta.

A quase um século que a utilidade produtiva dos insumos econômicos capital e trabalho tem sido quantificada e estudada, utilizando a conhecida "função Cobb-Douglas". Em economia, a função produção de Cobb-Douglas é amplamente utilizada para representar a relação de uma saída de insumos. Foi proposto por Knut Wicksell em 1958 (Vaggi *et al.* 2003) e testado contra a evidência estatística por Charles Cobb e Paul Douglas. Em 1928, Charles Cobb e Paul Douglas publicaram um estudo no qual modelaram o crescimento da economia americana durante o período de 1899-1922. O modelo provou ser muito preciso. O termo função de produção Cobb Douglas tem sido usado para se referir a quase qualquer função de utilidade produtiva multiplicativa simples.

Nesse trabalho procura-se maximizar a utilidade produtiva dos insumos água - nitrogênio utilizando função Cobb-Douglas, mas com insumos limitados e restrição de gastos fixos em insumos (lâmina de água e dose de nitrogênio). Apresenta-se um procedimento computacional que determina uma solução ótima do programa não-linear associado ao problema, como também ensaios numéricos utilizando informações conhecidas na literatura da hortense alface (Silva *et al.* 2008) e do fruteiro meloeiro (Monteiro *et al.* 2006).

Material e Métodos

No planejamento agrícola é importante medir o grau de satisfação ou utilidade de produção em relação a insumos limitados e custos fixo. Nesse trabalho utilizaremos a conhecida ***função produção de Cobb-Douglas*** para medir a utilidade máxima de produção de dois insumos centrais no desenvolvimento de qualquer lavoura agrícola: água e nitrogênio. A fórmula desta função em relação aos insumos lâmina de água (w) e dose de nitrogênio (n), está dada por: $y(w,n) = kw^{\alpha}n^{1-\alpha}$, onde $k > 0\,; 0 < \alpha < 1$, e o problema de interesse pode ser modelado matematicamente como o programa de programação não-linear dado por:

$$
\text{(P)} \qquad \begin{aligned}
&Maximizar \;\; y(w,n) = kw^{\alpha}n^{1-\alpha} & \\
&Sujeito: \quad c_w w + c_n n = c_0 & (1)\\
&\qquad\qquad w_l \leq w \leq w_u & (2)\\
&\qquad\qquad n_l \leq n \leq n_u & (3)
\end{aligned}
$$

Em que:

$y(w,n)$ – função de utilidade produtiva dos insumos, lâmina de água (mm) e dose de nitrogênio $(kg.ha^{-1})$.
$k > 0 \ (mm^{-1}ha^{-1})$

w – lâmina de água (mm)

n – dose de nitrogênio (kg)

c_w – custo de uma lâmina de água $(R\$ \, mm^{-1})$

c_n – custo de uma dose de nitrogênio $(R\$ \, kg^{-1})$

c_0 – custo fixo predeterminado $(R\$)$

w_u, w_l – limitante superior e inferior de w (mm) respectivamente

n_u, n_l – limitante superior e inferior de n (mm) respectivamente

Economicamente a função multiplicativa Cobb-Douglas em relação aos insumos lâmina de água e dose de nitrogênio, representa a utilidade produtiva dos insumos que deseja ser maximizada; mais ainda, os chamados fatores de "elasticidade" α e $1-\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$, representam a contribuição de utilidade que têm cada insumo na produção de uma cultura agrícola. Por exemplo, se $\alpha = 0.25$, então a variável lâmina de água tem uma contribuição de utilidade produtiva de 25%, e a variável dose de nitrogênio de 75%. No contexto econômico, entende-se por elasticidade, o tamanho do impacto que a alteração em uma das variáveis (w ou n) exerce sobre a outra; isto é, a resposta ou reação de um dos insumos com a mudança do outro.

Em (P), a restrição (1), que geometricamente representa um plano no espaço, impõe que a quantidade máxima permitida em gastos de insumos, não pode exceder um determinado custo fixo. Já as restrições (2) e (3), que representam a caixa bidimensional $[w_l, w_u]x[n_l, n_u]$ no plano, limitando inferior e superiormente as possíveis quantias dos insumos: lâmina de água e dose de nitrogênio. Observando que em (P):

$$Maximizar \quad y(w,n) \approx Maximizar \quad Ln\, y(w,n),$$

procura-se:

$$\begin{array}{lll} (P)_{Ln} & Maximizar\, f(w,n) = \beta + \alpha Ln\, w + (1-\alpha) Ln\, n & \\ & \qquad Sujeito: & c_w w + c_n n = c_0 \\ & & w_l \leq w \leq w_u \\ & & n_l \leq n \leq n_u \end{array}$$

Em que $\beta = Ln\, k$.

Note que o problema $(P)_{Ln}$ é um problema de programação não linear com restrições lineares, onde a função objetivo $f(w,n) = \beta + \alpha Ln\, w + (1-\alpha) Ln\, n$ é estritamente côncava e o conjunto de soluções viáveis $S = \{(w,n): c_w w + c_n n = c_0, w_l \leq w \leq w_u, \ n_l \leq n \leq n_u\}$ é fechado e limitado. Mais ainda, se $(w,n) \in S$ então $c_w w_l + c_n n_l \leq c_0 \leq c_w w_u + c_n n_u$. Portanto, existe uma única solução ótima do problema $(P)_{Ln}$, que procuramos determinar de forma aproximada utilizando um procedimento computacional baseado em uma "hibridez" entre as metodologias barreira logarítmica e Lagrange. Inicialmente, suponha dado um parâmetro $\mu > 0$ e associemos a $(P)_{Ln}$ a função estritamente côncava:

$\varphi_\mu(w,n) = f(w,n) + \mu[Ln\,(w - w_l) + Ln\,(w_u - w) + Ln\,(n - n_l) + Ln\,(n_u - n)]$. Note que $\varphi_\mu(w,n)$ é estritamente côncava posto que a função logaritmo neperiano é, assim a soma de funções estritamente côncava (ver Bazaraa *et al.* 1979).

Seguidamente, procura-se:

$$\begin{aligned} &Maximizar\ \varphi_\mu(w,n) \\ &Sujeito:\ c_w w + c_n n - c_0 = 0 \end{aligned}$$

Seja $L_\mu(w,n,v) = \varphi_\mu(w,n) + v(c_w w + c_n n - c_0)$. Onde $v > 0$ – Multiplicador de Lagrange.

Agora se busca: $Maximizar\ L_\mu(w,n,v)$ (*)

Pelas condições de primeira ordem, (w,n,v) resolve (*), se e somente se $\nabla L_\mu(w,n,v) = 0$. Isto é:

$$\frac{\partial L_\mu(w,n,v)}{\partial w} = \frac{\alpha}{w} + \frac{\mu}{w - w_l} - \frac{\mu}{w_u - w} + c_w v = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial L_\mu(w,n,v)}{\partial n} = \frac{(1-\alpha)}{n} + \frac{\mu}{n - n_l} - \frac{\mu}{n_u - n} + c_n v = 0 \qquad (5)$$

$$\frac{\partial L_\mu(w,n,v)}{\partial v} = c_w w + c_n n - c_0 = 0 \qquad (6)$$

Fazendo: $z_\mu^{w_l} = \frac{\mu}{w - w_l}$; $z_\mu^{w_u} = \frac{\mu}{w_u - w}$; $z_\mu^{n_l} = \frac{\mu}{n - n_l}$; $z_\mu^{n_u} = \frac{\mu}{n_u - n}$; $\theta_\alpha^w = \frac{\alpha}{w}$; $\theta_\alpha^n = \frac{(1-\alpha)}{n}$, o sistema (4)-(5)-(6) pode ser escrito como:

$$\theta_\alpha^w + z_\mu^{w_l} - z_\mu^{w_u} + c_w v = 0 \qquad (7)$$

$$\theta_\alpha^n + z_\mu^{n_l} - z_\mu^{n_u} + c_n v = 0 \qquad (8)$$

$$w\theta_\alpha^w = \alpha \qquad (9)$$

$$n\theta_\alpha^n = (1 - \alpha) \qquad (10)$$

$$z_\mu^{w_l}(w - w_l) = \mu \qquad (11)$$

$$z_\mu^{w_u}(w_u - w) = \mu \qquad (12)$$

$$z_\mu^{n_l}(n - n_l) = \mu \qquad (13)$$

$$z_\mu^{n_u}(n_u - n) = \mu \qquad (14)$$

$$h(w,n) - c_0 = 0 \qquad (15)$$

Em que: $w, n, z_\mu^{w_l}, z_\mu^{w_u}, z_\mu^{n_l}, ; z_\mu^{n_u}, \theta_\alpha^w, \theta_\alpha^n, v > 0$ e $h(w,n) = c_w w + c_n n$.

Note que (7)-(15) representa um sistema de equações não lineares que podemos resolver utilizando o método de Newton, onde iterativamente precisa-se da chamada direção Newton-Raphson $(\Delta w, \Delta n, \Delta z_\mu^{w_l}, \Delta z_\mu^{w_u}, \Delta z_\mu^{n_l}, \Delta z_\mu^{n_u}, \Delta\theta_\alpha^w, \Delta\theta_\alpha^n, \Delta v)$ tal que:

$(w + \Delta w,\ n + \Delta n, z_\mu^{w_l} + \Delta z_\mu^{w_l}, z_\mu^{w_u} + \Delta z_\mu^{w_u}, z_\mu^{n_l} + \Delta z_\mu^{n_l}, z_\mu^{n_u} + \Delta z_\mu^{n_u}, \theta_\alpha^w + \Delta\theta_\alpha^w, \theta_\alpha^n + \Delta\theta_\alpha^n, \quad v + \Delta v)$ satisfaze (7)-(15); isto é:

$$(\theta_\alpha^w + \Delta\theta_\alpha^w) + (z_\mu^{w_l} + \Delta z_\mu^{w_l}) - (z_\mu^{w_u} + \Delta z_\mu^{w_u}) + c_w(v + \Delta v) = 0$$

$$(\theta_\alpha^n + \Delta\theta_\alpha^n) + \left(z_\mu^{n_l} + \Delta z_\mu^{n_l}\right) - \left(z_\mu^{n_u} + \Delta z_\mu^{n_u}\right) + c_n(v + \Delta v) = 0$$

$$(w + \Delta w)(\theta_\alpha^w + \Delta\theta_\alpha^w) = \alpha$$

$$(n + \Delta n)(\theta_\alpha^n + \Delta\theta_\alpha^n) = (1 - \alpha)$$

$$(z_\mu^{w_l} + \Delta z_\mu^{w_l})((w + \Delta w) - w_l) = \mu$$

$$(z_\mu^{w_u} + \Delta z_\mu^{w_u})(w_u - (w + \Delta w)) = \mu$$

$$(z_\mu^{n_l} + \Delta z_\mu^{n_l})((n + \Delta n) - n_l) = \mu$$

$$(z_\mu^{n_u} + \Delta z_\mu^{n_u})(n_u - (n + \Delta n)) = \mu$$

$$c_w(w + \Delta w) + c_n(n + \Delta n) - c_0 = 0$$

Assim que:

$$\Delta\theta_\alpha^w + \Delta z_\mu^{w_l} - \Delta z_\mu^{w_u} + c_w\Delta v = -\theta_\alpha^w - z_\mu^{w_l} + z_\mu^{w_u} - c_w v = g_1$$

$$\Delta\theta_\alpha^n + \Delta z_\mu^{n_l} - \Delta z_\mu^{n_u} + c_n\Delta v = -\theta_\alpha^n - z_\mu^{n_l} + z_\mu^{n_u} - c_n v = g_2$$

$$w\Delta\theta_\alpha^w + \theta_\alpha^w\Delta w = \alpha - w\theta_\alpha^w = g_3$$

$$n\Delta\theta_\alpha^n + \theta_\alpha^n\Delta n = (1 - \alpha) - n\theta_\alpha^n = g_4$$

$$z_\mu^{w_l}\Delta w + (w - w_l)\Delta z_\mu^{w_l} = \mu - z_\mu^{w_l}(w - w_l) = g_5$$

$$-z_\mu^{w_u}\Delta w + (w_u - w)\Delta z_\mu^{w_u} = \mu - (w_u - w)z_\mu^{w_u} = g_6$$

$$z_\mu^{n_l}\Delta n + (n - n_l)\Delta z_\mu^{n_l} = \mu - (n - n_l)z_\mu^{n_l} = g_7$$

$$-z_\mu^{n_u}\Delta n + (n_u - n)\Delta z_\mu^{n_u} = \mu - (n_u - n)z_\mu^{n_u} = g_8$$

$$c_w\Delta w + c_n\Delta n = c_0 - c_w w - c_n n = c_0 - h(w,n) = g_9$$

Matricialmente, o sistema linear anterior pode ser escrito como:

$$A\begin{pmatrix}\Delta w\\ \Delta n\\ \Delta z_{\mu}^{w_l}\\ \Delta z_{\mu}^{w_u}\\ \Delta z_{\mu}^{n_l}\\ \Delta z_{\mu}^{n_u}\\ \Delta\theta_{\alpha}^{w}\\ \Delta\theta_{\alpha}^{n}\\ \Delta v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_1\\ g_2\\ g_3\\ g_4\\ g_5\\ g_6\\ g_7\\ g_8\\ g_9\end{pmatrix} \qquad (16)$$

Em que A é a matriz 9 x 9 dada por:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & c_w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & c_n \\ \theta_\alpha^w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & \theta_\alpha^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n & 0 \\ z_\mu^{w_l} & 0 & (w-w_l) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -z_\mu^{w_u} & 0 & 0 & (w_u-w) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_\mu^{n_l} & 0 & 0 & (n-n_l) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z_\mu^{n_u} & 0 & 0 & 0 & (n_u-n) & 0 & 0 & 0 \\ c_w & c_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Seguidamente, apresentamos o procedimento implementado na plataforma MATLAB 4.0.

Procedimento

DADOS

$k = 1.01; 0 < \alpha < 1; c_0,\ c_w,\ c_n > 0; w_u > w_l > 0;\ n_u > n_l > 0;$

$w = \frac{w_u - w_l}{2};\ n = \frac{n_u - n_l}{2};\ v > 0; \mu_0 > 0;$

$\tau, \sigma, \varepsilon_i \in (0,1)$ para $i = 0,1,2$.

FAZER $\mu = \mu_0$ e calcular $z_\mu^{w_l}, z_\mu^{w_u}, z_\mu^{n_l}, z_\mu^{n_u}, \theta_\alpha^w, \theta_\alpha^n$

ENQUANTO não achar a solução ótima FAZER

Sejam $\sigma_0 = |h(w,n) - c_0|; \sigma_1 = \left|\theta_\alpha^w + z_\mu^{w_l} - z_\mu^{w_u} + c_w v\right|;$
$\sigma_2 = \left|\theta_\alpha^n + z_\mu^{n_l} - z_\mu^{n_u} + c_n v\right|;$
$\mu = \frac{\tau}{6}\left[(w\theta_\alpha^w - \alpha) + n\theta_\alpha^n - (1-\alpha) + z_\mu^{w_l}(w - w_l) + z_\mu^{w_u}(w_u - w) + z_\mu^{n_l}(n - n_l) + z_\mu^{n_u}(n_u - n)\right]$
SE $\mu < 10^{-4}$ e $\sigma_i < \varepsilon_i$, para $i = 0,1,2$ ENTÃO

PARE, a solução encontrada é ótima;

FIM SE

AVALIAR $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8, g_9$

DETERMINE A DIREÇÂO DE NEWTON

ACHAR $(\Delta w, \Delta n, \Delta z_\mu^{w_l}, \Delta z_\mu^{w_u}, \Delta z_\mu^{n_l}, \Delta z_\mu^{n_u}, \Delta\theta_\alpha^w, \Delta\theta_\alpha^n, \Delta v)$ tal que (16) seja satisfeito

DETERMINE O TAMANHO DO PASSO

$$\beta_w = \frac{1}{max\left\{1, -\frac{\Delta w}{\sigma w}\right\}}\ ;\ \beta_n = \frac{1}{max\left\{1, -\frac{\Delta n}{\sigma n}\right\}};\ \beta_z^{w_l} = \frac{1}{max\left\{1, -\frac{\Delta z_\mu^{w_l}}{\sigma z_\mu^{w_l}}\right\}};\ \beta_z^{w_u} = \frac{1}{max\left\{1, -\frac{\Delta z_\mu^{w_u}}{\sigma z_\mu^{w_u}}\right\}};$$

$$\beta_z^{n_l} = \frac{1}{max\left\{1, -\frac{\Delta z_\mu^{n_l}}{\sigma z_\mu^{n_l}}\right\}};\ \beta_z^{n_u} = \frac{1}{max\left\{1, -\frac{\Delta z_\mu^{n_u}}{\sigma z_\mu^{n_u}}\right\}};\ \beta_\theta^w = \frac{1}{max\left\{1, -\frac{\Delta\theta_\alpha^w}{\sigma\theta_\alpha^w}\right\}}\ ;\ \beta_\theta^n = \frac{1}{max\left\{1, -\frac{\Delta\theta_\alpha^n}{\sigma\theta_\alpha^n}\right\}};$$

$$\beta_v = \frac{1}{max\left\{1, -\frac{\Delta v}{\sigma v}\right\}}$$

ATUALIZAR A SOLUÇÃO

$$w = w + \beta_w \Delta w\ ;\ n = n + \beta_n \Delta n;\ z_\mu^{w_l} = z_\mu^{w_l} + \beta_z^{w_l} \Delta z_\mu^{w_l};\ z_\mu^{w_u} = z_\mu^{w_u} + \beta_z^{w_u} \Delta z_\mu^{w_u};$$

$$z_\mu^{n_l} = z_\mu^{n_l} + \beta_z^{n_l} \Delta z_\mu^{n_l};\ z_\mu^{n_u} = z_\mu^{n_u} + \beta_z^{n_u} \Delta z_\mu^{n_u};\ \theta_\alpha^w = \theta_\alpha^w + \beta_\theta^w \Delta\theta_\alpha^w;\ \theta_\alpha^n = \theta_\alpha^n + \beta_\theta^n \Delta\theta_\alpha^n;\ v = v + \beta_v \Delta v$$

FIM ENQUANTO

Resultados e Discussão

Para testar computacionalmente o procedimento apresentado, foram realizados ensaios numéricos utilizando informações conhecidas na literatura da hortense alface (Silva *et al.* 2008) e do fruteiro meloeiro (Monteiro *et al.* 2006). De acordo com os dados fornecidos pelas fontes bibliográficas, para ambas culturas escolhidas foi possível determinar limitantes inferior e superior da lâmina de água e dose de nitrogênio; ficando para ambas culturas um limitante inferior da lâmina de água de $100\, mm$ e um limitante superior de $700\, mm$. Nos ensaios numéricos foram utilizados os intervalos hídricos: $[100{,}400], [100{,}500]$ e $[100{,}700]$. É importante ressaltar que o manejo adequado da lâmina de água (w) é fundamental, considerando que o setor agrícola é o maior consumidor de água, e que os recursos hídricos são essenciais e estratégicos no desenvolvimento da agricultura.

Em relação ao insumo do nitrogênio, o limitante inferior foi fixado em $20\, kg.ha^{-1}$ e o superior em $160\, kg.ha^{-1}$. Nos ensaios numéricos foram utilizados os intervalos: $[70{,}150], [60{,}150], [20{,}120], [60{,}150], [20{,}100]$ e $[50{,}160]$. Também, considerando que na atualidade os custos de adubação nitrogenada, especificamente nitrogênio (n), são cada vez mais variáveis, e que a demanda no Brasil cresce a cada dia, é necessário que sejam respeitadas as questões ambientais e de preservação dos solos, como peça fundamental para uma agricultura sustentável. Nas experiências numéricas realizadas, o custo da lâmina de água c_w $(R\$\, mm^{-1})$ e custo da dose de nitrogênio c_n $(R\$\, kg^{-1})$, foram mantidos como os apresentados na literatura do momento, tanto para alface como para o meloeiro. Para alface: $c_w = 0{,}44\, R\$\, mm^{-1}$ e $c_n = 2{,}09\, R\$\, kg^{-1}$ e para meloeiro: $c_w = 0{,}134\, R\$\, mm^{-1}$ e $c_n = 2{,}33\, R\$\, kg^{-1}$. Para ambas culturas e cada experiência numérica, o chamado custo fixo predeterminado c_0 $(R\$)$, destinado aos gastos dos insumos lâmina de água w (mm) e dose de nitrogênio n (kg), tomou os valores: $c_0 = R\$\, 200$, $c_0 = R\$\, 250$, $c_0 = R\$\, 300$, $c_0 = R\$\, 350$, $c_0 = R\$\, 400$.

No que respeita às funções Cobb-Douglas utilizadas nos ensaios numéricos: $kw^\alpha n^{1-\alpha}$, de forma estândar foi fixado $k = 1.01$, mas para a elasticidade parcial de produção (α), que quantifica a variação do volume de produção, relacionando-a com as variações na utilização dos insumos, foram considerados os valores: $\alpha = 0.25, \alpha = 0.50$ e $\alpha = 0.75$; isto é, consideramos três estágios possíveis de utilidade dos insumos na produção, destacando que para $\alpha = 0.25$, teríamos 25% de utilização da lâmina de água e de 75% por parte da dose de nitrogênio. No caso $\alpha = 0.50$, tem-se 50% de utilização de ambos insumos, e o caso $\alpha = 0.75$, corresponde ao estágio onde se tem, 75% de utilização da lâmina de água e 25% da dose de nitrogênio. Na diante, $w^*[c_0(.)], n^*[c_0(.)]$ *e* $\text{UTP}[c_0(.)]$, denotaram a lâmina de água ótima (mm), a dose ótima de nitrogênio (kg) e a utilidade de produção $(kg\ ha^{-1})$, associado a determinado custo fixo $(R\$\ 200, R\$\ 250, R\$\ 300, R\$\ 350, R\$\ 400)$. A continuação um conjunto de **Tabelas** que mostram os resultados numéricos obtidos para cada cultura e cenário definido. As **Tabelas 1** e **2** correspondem à solução ótima do problema (P) junto ao valor ótimo da utilidade de produção da alface e do meloeiro, respectivamente, quando $\alpha = 0.25$.

Tabela 1. Solução ótima (w^*, n^*) e valor ótimo da utilidade de produção da alface na caixa $[100{,}400]x[70{,}150]$, com $c_w = 0.44$ R\$ mm^{-1} e $c_n = 2.09$ R\$ kg^{-1}. $\alpha = 0.25$.

$c_0(R\$)$	$w^*(mm)$	$n^*(kg)$	Utilidade de Produção UTP $kg\ ha^{-1}$
200	114.305	71.630	81.312
250	142.353	89.648	101.641
300	170.675	107.609	121.969
350	199.023	125.565	142.297
400	227.359	143.523	162.625

(*) Note que: $c_w w^* + c_n n^* \cong c_0$

Tabela 2. Solução ótima (w^*, n^*) e valor ótimo da utilidade de produção do meloeiro na caixa $[100{,}500]x[60{,}150]$ com $c_w = 0{,}134$ R\$ mm^{-1} e $c_n = 2{,}33$ R\$ kg^{-1}. $\alpha = 0.25$.

$c_0(R\$)$	$w^*(mm)$	$n^*(kg)$	Utilidade de Produção UTP $kg\ ha^{-1}$
200	367.832	64.683	100.884
250	397.878	84.414	125.623
300	427.924	104.145	150.353
350	457.970	123.876	175.083
400	488.016	143.607	199.813

(*) Note que: $c_w w^* + c_n n^* \cong c_0$

Em ambas **Tabelas** se observa uma característica da função Cobb-Douglas com retornos constantes a escala. Para alface e cada $i = 200{,}250{,}300{,}350$:

$$w^*[c_0(i+50)] - w^*[c_0(i)] = 28{,}3\ mm$$
$$n^*[c_0(i+50)] - n^*[c_0(i)] = 18\ kg.ha^{-1}$$
$$UTP[c_0(i+50)] - \text{UTP}[c_0(i)] = 20{,}328\ kg\ ha^{-1}$$

Já para o meloeiro e cada $i = 200{,}250{,}300{,}350$

$$w^*[c_0(i+50)] - w^*[c_0(i)] = 30{,}04\ mm$$
$$n^*[c_0(i+50)] - n^*[c_0(i)] = 19{,}73\ kg.ha^{-1}$$
$$UTP[c_0(i+50)] - \text{UTP}[c_0(i)] = 24{,}73\ kg\ ha^{-1}$$

Note que nas **Tabelas 1** e **2**, as sequências finitas $w^*[c_0(.)]$, $n^*[c_0(.)]$ e $UTP[c_0(.)]$ são crescente na medida em que o parâmetro c_0 tem aumento constante de $R\$\ 50$. Mais ainda, e como era de esperar, para uma elasticidade parcial de produção $\alpha = 0.25$, é possível observar que enquanto os valores da lâmina ótima de água ficam interiormente afastados do limitante superior do intervalo de irrigação, as doses de nitrogênio se aproximam interiormente do limitante superior das doses de nitrogênio. As **Tabelas 3** e **4** correspondem à solução ótima do problema (P) junto ao valor ótimo da utilidade de produção da alface e do meloeiro respectivamente, quando $\alpha = 0.5$.

Tabela 3. Solução ótima (w^*, n^*) e valor ótimo da utilidade de produção da alface na caixa $[100,500]x[20,120]$ com $c_w = 0{,}44$ R\$ mm^{-1} e $c_n = 2{,}09$ R\$ kg^{-1}. $\alpha = 0.5$.

$c_0(R\$)$	$w^*(mm)$	$n^*(kg)$	Utilidade de Produção UTP $kg\ ha^{-1}$
200	227.322	47.837	105.322
250	284.107	59.805	131.653
300	340.892	71.741	157.983
350	397.677	83.741	184.313
400	454.462	95.709	210.643

(*) Note que: $c_w w^* + c_n n^* \cong c_0$

Tabela 4. Solução ótima (w^*, n^*) e valor ótimo da utilidade de produção do meloeiro na caixa $[100,400]x[60,150]$ com $c_w = 0{,}134$ R\$ mm^{-1} e $c_n = 2{,}33$ R\$ kg^{-1}. $\alpha = 0.5$.

$c_0(R\$)$	$w^*(mm)$	$n^*(kg)$	Utilidade de Produção UTP $kg\ ha^{-1}$
200	399.685	62.851	160.079
250	399.725	84.308	185.411
300	399.765	105.765	210.743
350	399.805	127.222	236.075
400	399.845	148.679	261.407

(*) Note que: $c_w w^* + c_n n^* \cong c_0$

Da **Tabela 3** e para cada $i = 200,250,300,350$

$$w^*[c_0(i+50)] - w^*[c_0(i)] = 56.785\ mm$$
$$n^*[c_0(i+50)] - n^*[c_0(i)] = 11.968\ kg.ha^{-1}$$
$$UTP[c_0(i+50)] - \mathrm{UTP}[c_0(i)] = 26.33\ kg\ ha^{-1}$$

Da **Tabela 4** e para cada $i = 200,250,300,350$.

$$w^*[c_0(i+50)] - w^*[c_0(i)] = 0.04\ mm$$
$$n^*[c_0(i+50)] - n^*[c_0(i)] = 21.457\ kg.ha^{-1}$$
$$UTP[c_0(i+50)] - \mathrm{UTP}[c_0(i)] = 25.332\ kg\ ha^{-1}$$

Novamente nas **Tabelas 3** e **4**, as sequências finitas $w^*[c_0(.)]$, $n^*[c_0(.)]$ e $UTP[c_0(.)]$ são crescente na medida em que o parâmetro c_0 tem aumento constante de $R\$\ 50$. Observe que na **Tabela 3**, onde o cenário é a cultura alface, a caixa bidimensional $[100,500]x[20,120]$ e a elasticidade parcial de produção $\alpha = 0.5$: $w^*[c_0(\text{R\$ } 200)] = 227.322$ mm, $w^*[c_0(\text{R\$ } 400)] = 454.462$ mm; em relação ao nitrogênio, $n^*[c_0(\text{R\$ } 200)] = 47.837$ kg e $n^*[c_0(\text{R\$ } 400)] = 95.709$ kg, e $UTP[c_0(R\$\ 200) = 105.322\ kg\ ha^{-1}$ e $UTP[c_0(R\$\ 400) = 210.643\ kg\ ha^{-1}$. Em relação aos insumos (lâmina de água e dose de nitrogênio), e como era de esperar, para uma elasticidade parcial de produção $\alpha = 0.5$; isto é, onde ambos insumos podem contribuir de igual forma, a lâmina de água ótima inicia-se quase no ponto médio do intervalo $[100,500]$ e finaliza próximo do limitante superior de irrigação igual a $500\ mm$. No caso das doses de nitrogênio ótimas, acontece igual, inicia-se quase no ponto médio do intervalo $[20,120]$ e finaliza próximo do limitante superior de nitrogênio igual a $120\ kg$. Agora, se observamos a **Tabela 4**, onde o cenário é a cultura do meloeiro e a caixa bidimensional $[100,400]x[60,150]$, vemos que a lâmina de água se inicia muito próximo do limitante superior de irrigação com valor igual a 399.685 mm, e finaliza com valor igual a 399.845 mm. Já o nitrogênio se inicia com valor igual a 62.851 kg, próximo do limitante inferior do nitrogênio (60 kg) e finaliza com valor igual a 148.679 kg, muito próximo do limitante superior do nitrogênio igual a 150 kg. Novamente, os resultados se encaixam dentro do esperado para uma elasticidade parcial de produção $\alpha = 0.5$.

Finalmente, as **Tabelas 5** e **6** correspondem à solução ótima do problema (P) junto ao valor ótimo da utilidade de produção da alface e do meloeiro, respectivamente, quando $\alpha = 0.75$.

Tabela 5. Solução ótima (w^*, n^*) e valor ótimo da utilidade de produção da alface na caixa $[100{,}700]x[20{,}100]$ com $c_w = 0{,}44$ R\$ mm^{-1} e $c_n = 2{,}09$ R\$ kg^{-1}. $\alpha = 0.75$.

c_0 (R\$)	$w^*(mm)$	$n^*(kg)$	Utilidade de Produção UTP $kg\ ha^{-1}$
200	340.877	23.930	177.217
250	425.979	29.938	221.521
300	551.081	35.946	265.825
350	596.183	41.954	310.129
400	681.285	47.962	354.433

(*) Note que: $c_w w^* + c_n n^* \cong c_0$

Nesta **Tabela** e para cada $i = 200{,}250{,}300{,}350$

$w^*[c_0(i+50)] - w^*[c_0(i)] = 85{,}102\ mm$
$n^*[c_0(i+50)] - n^*[c_0(i)] = 6{,}008\ kg\ ha^{-1}$
$UTP[c_0(i+50)] - \text{UTP}[c_0(i)] = 44{,}304\ kg\ ha^{-1}$

Tabela 6. Solução ótima (w^*, n^*) e valor ótimo da utilidade de produção do meloeiro na caixa $[100{,}500]x[50{,}160]$ com $c_w = 0{,}134\ (\frac{R\$}{mm})$ e $c_n = 2{,}33$ R\$ kg^{-1}. $\alpha = 0.75$.

c_0 (R\$)	$w^*(mm)$	$n^*(kg)$	Utilidade de Produção UTP $kg\ ha^{-1}$
200	499.799	57.093	293.470
250	499.810	78.552	317.843
300	499.821	100.011	342.216
350	499.832	121.470	366.589
400	499.843	142.929	390.962

(*) Note que: $c_w w^* + c_n n^* \cong c_0$

Nesta **Tabela** e para cada $i = 200{,}250{,}300{,}350$.

$w^*[c_0(i+50)] - w^*[c_0(i)] = 0{,}011\ mm.$
$n^*[c_0(i+50)] - n^*[c_0(i)] = 1{,}459\ kg.ha^{-1}$
$UTP[c_0(i+50)] - \text{UTP}[c_0(i)] = 24{,}373\ kg\ ha^{-1}$

Novamente, nas **Tabelas 5** e **6**, as sequências finitas $w^*[c_0(.)]$, $n^*[c_0(.)]$ e $UTP[c_0(.)]$ são crescente na medida em que o parâmetro c_0 tem aumento constante de $R\$\ 50$. Observe que na **Tabela 5**, onde o cenário é a cultura alface, a caixa bidimensional $[100{,}700]x[20{,}100]$ e a elasticidade parcial de produção $\alpha = 0.75$: $w^*[c_0(\text{R\$ }200)] = 340{,}877$mm, $w^*[c_0(\text{R\$ }400)] = 681{,}285$ mm; em relação ao nitrogênio, $n^*[c_0(\text{R\$ }200)] = 23{,}930$ kg e $n^*[c_0(\text{R\$ }400)] = 23.930$ kg, e $UTP[c_0(R\$\ 200) = 177.217\ kg\ ha^{-1}$ e $UTP[c_0(R\$\ 400) = 354.433\ kg\ ha^{-1}$. Em relação aos insumos (lâmina de água e dose de nitrogênio), e como era de esperar, para uma elasticidade parcial de produção $\alpha = 0.75$; isto é, onde a lâmina de água contribui com um 75% e o nitrogênio com 25%, a lâmina de água ótima inicia-se quase no ponto médio do intervalo $[100{,}700]$ e finaliza próximo do limitante superior de irrigação igual a $700\ mm$. No caso das doses de nitrogênio ótimas, inicia-se próximo do limitante inferior do nitrogênio e finaliza próximo do ponto médio do intervalo $[20{,}100]$. Agora, se observamos a **Tabela 6**, onde o cenário é a cultura do meloeiro, e a caixa bidimensional $[100{,}500]x[50{,}160]$, vemos que a lâmina de água se inicia muito próximo do limitante superior de irrigação com valor igual a 499.799 mm, e finaliza com valor igual a 499.843 mm. Já o nitrogênio se inicia com valor igual a 57.093 kg, próximo do limitante inferior do nitrogênio (50 kg) e finaliza com valor igual a 142.929 kg; valor aceitável se consideramos que $\alpha = 0.75$.

Conclusões

Apresentou-se um procedimento computacional para resolver o problema (P), baseado em uma "hibridez" entre as metodologias barreira logarítmica e Lagrange. O procedimento mostrou consistência numérica.

Todos os resultados numéricos obtidos respondem ao esperado de uma função tipo Cobb-Douglas com retornos constantes à escala.

Em todos os cenários considerados para as culturas alface e meloeiro foi possível comprovar que: $w^*[c_0(i+50)] - w^*[c_0(i)] = k_i^w > 0$; $n^*[c_0(i+50)] - n^*[c_0(i)] = k_i^n > 0$; $UTP[c_0(i+50)] - \mathrm{UTP}[c_0(i)] = k_i^{UTP} > 0$; para cada $i = 200{,}250{,}300{,}350$.

Agradecimentos

Aos avaliadores pelas críticas construtivas ao texto.

Referências

Bazaraa M.C., Sherali H.D. & Shetty H.D. (1979) Nonlinear Programming: Theory and Algorithms. New York: John Wiley & Sons. 560 p.

English M. & Raja S.N. (1996) Perspective on Deficit Irrigation. Volume 32. Amsterdam: Agricultural Water Management. 14 p.

Klar A.E. (1988) A água no sistema solo-planta-atmosfera. São Paulo: Nobel. 408 p.

Lopes A.S. & Guilherme L.R.G. (2000) Uso eficiente de fertilizantes e corretivos agrícolas: aspectos agronômicos. Boletim Técnico 4. 3° edição. São Paulo: ANDA. 72 p.

Monteiro R.O.C., Colares D.S., Costa T.R.N., Leão M.C.S. & Aguiar J.V. (2006) Função de resposta do meloeiro a diferentes lâminas de irrigação e doses de nitrogênio. *Horticultura Brasileira*, 24(4): 455–459. https://doi.org/10.1590/S0102-05362006000400012

Pires R.C.M., Sakai E., Arruda F.B. & Folegatti M.V. (2001) Necessidades hídricas das culturas e manejo da irrigação. Série Engenharia Agrícola 1. Piracicaba: FUNEP. 410 p.

Silva P.A.M., Pereira G.M., Reis R.P., Lima L.A. & Taveira J.H.S. (2008) Função de resposta da alface americana aos níveis de água e adubação nitrogenada. *Ciência Agrotécnica*, 32(4): 1266–1271. https://doi.org/10.1590/S1413-70542008000400035

Vaggi G. & Groenewegen P. (2003) Knut Wicksell (1851–1926): Interest and Prices (p. 255–259). *In*: Vaggi G. & Groenewegen P. (Eds). A Concise History of Economic Thought. London: Palgrave Macmillan. 339 p. https://doi.org/10.1057/9780230505803_25