Pesquisa e Ensino em Ciências Exatas e da Natureza
4: e1460 (2020)
Research and Teaching in Exact and Natural Sciences

ARTIGO

ISSN 2526-8236 (edição online)
Pesquisa e Ensino em Ciências Exatas e da Natureza

Calibração de objetivos na otimização da produção agrícola com recursos limitados

Pedro Marcio Ferreira[1], Sérgio Drumond Ventura[1] & Angel Ramon Sanchez Delgado[1,2]

(1) Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Rodovia BR 465, Km 07, Zona Rural, Seropédica 23897-000, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: pedroborgesengen@gmail.com, ventura@ufrrj.br

(2) Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Programa de Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional, Rodovia BR 465, Km 07, Zona Rural, Seropédica 23897-000, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: asanchez@ufrrj.br

Ferreira P.M., Ventura S.D. & Delgado A.R.S. (2020) Calibração de objetivos na otimização da produção agrícola com recursos limitados. *Pesquisa e Ensino em Ciências Exatas e da Natureza*, 4: e1460.
http://dx.doi.org/10.29215/pecen.v4i0.1460

Editor acadêmico: Eudes Leite de Lima. **Recebido**: 15 janeiro 2020. **Aceito**: 16 julho 2020. **Publicado**: 24 julho 2020.

Resumo: A maximização da receita líquida com recursos limitados (água e terra) se torna uma boa opção na tomada de decisão para se chegar a um esquema ótimo de produção agrícola. Suponha conhecidas as soluções ótimas de programas lineares associados à maximização da receita líquida com recursos limitados de um conjunto de lotes de cultivo localizados em um mesmo município. Nesse trabalho, procura-se construir através da dualidade, um programa linear (PL) que represente os valores objetivos ótimos de cada lote; isto é, onde o erro relativo entre o valor objetivo ótimo do PL representativo e o valor objetivo ótimo de cada lote seja o menor possível (calibração). O procedimento computacional de calibração apresentado, foi testado satisfatoriamente para nove lotes localizados no perímetro irrigado de Gorutuba, município de Nova Porteirinha, norte do estado de Minas Gerais, mostrando assim, ser um esquema de calibração confiável.

Palavras chave: Agronegócio, dualidade, problema inverso.

Calibration of objectives in the optimization of agricultural production with limited resources

Abstract: The maximization of net revenue with limited resources (water and land) becomes a good option in decision making to arrive at an optimal agricultural production scheme. Suppose known the optimal solutions of linear programs associated with the maximization of the net revenue with limited resources of a set of cultivation plots located in the same municipality. This work seeks to build through duality, a linear program (PL) that represents the optimal objective values of each lot; that is, where the relative error between the optimal objective value of the representative PL and the optimal objective value of each lot is as small as possible (calibration). The computational calibration procedure presented, was tested satisfactorily for nine lots located in the irrigated perimeter of Gorutuba, municipality of Nova Porteirinha, northern Minas Gerais state, thus showing to be a reliable calibration scheme.

Key words: Agribusiness, duality, inverse problem.

Introdução

Estimar receitas líquidas agrícolas ótimas com insumos (ou recursos) limitados é um problema importante na tomada de decisões no agronegócio. A otimização da rentabilidade constitui um dos principais objetivos da empresa agrícola brasileira e está associada ao uso racional dos recursos disponíveis no processo de produção de forma a se obter os mais altos níveis de rendimento econômico. A água e a terra são fatores preponderantes para o êxito da agricultura e seu manejo racional é imperativo na otimização da produção agrícola (Delgado *et al.* 2010). Em um planejamento ótimo da produção agrícola com recursos (água e terra) limitados, procura-se selecionar as culturas e os meses de plantio que proporcionem a maximização da receita líquida e a melhor utilização dos recursos disponíveis (Frizzone *et al.* 2005).

Nas decisões, temos que escolher entre as diferentes políticas de produção, a mais eficiente em relação às metas e condições de viabilidade. As decisões baseadas no julgamento e na intuição podem ser satisfatórias quando o número de fatores do problema é limitado e suas relações são claras, mas em situações em que esse número cresce faz-se necessário a utilização de modelos matemáticos, os quais permitem representar alternativas ou simular condições reais.

A Programação Linear (PL) na Programação Matemática (Bazaraa *et al.* 1979) representa um dos modelos mais apropriados para resolver o problema fundamental da alocação ótima de recursos, visando encontrar a melhor distribuição e médias de produção disponíveis (Frizzone *et al.* 1997). O planejamento irracional das condições de área irrigada e o uso dos recursos justifica a utilização de técnicas de PL na procura da lucratividade das áreas irrigadas. Em geral, procura-se construir um modelo de PL que possa selecionar as culturas a ser desenvolvidas e quanto de cada cultura deve ser plantada.

Nesse trabalho desenvolvemos e implementamos computacionalmente um procedimento baseado na teoria da dualidade de PL, capaz de gerar uma calibração confiável entre os valores objetivos ótimos de nove lotes localizados no perímetro irrigado de Gorutuba, município de Nova Porteirinha, norte do estado de Minas Gerais, e o valor objetivo ótimo de um PL representativo dos respectivos lotes considerados.

Material e Métodos

No planejamento agrícola, com limitações de água e terra, procura-se selecionar as culturas e os meses de plantio em um perímetro irrigado composto por um conjunto de lotes, que proporcionem a maximização da receita líquida e a melhor utilização dos recursos disponíveis. O problema é determinar um padrão de cultivo ótimo das culturas para cada lote, de tal maneira que a receita líquida seja máxima quando é feita uma racionalização dos recursos. Foram selecionados nove lotes com características de solo e sistemas de irrigação distintos, quatro culturas anuais: abóbora, feijão, milho, quiabo; e quatro culturas perenes: banana prata, banana nanica, limão e manga. Esquematicamente, o modelo de programação linear para representar o problema anterior, pode ser equacionado como segue:

$$
\begin{aligned}
&\text{Maximizar} \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{12} \left(p_{ij}y_i - c_i\right)x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} r_{ij}x_{ij} \\
&\text{Sujeito a:} \quad \sum_{i=1}^{m} v_{ij}x_{ij} \le VT_j \qquad j = 1, \dots, 12 \\
&\qquad\qquad\quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le AT_j \qquad j = 1, \dots, 12 \\
&\qquad\qquad\qquad x_{ij} \ge 0 \qquad i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, 12
\end{aligned}
$$

Em que:

- i – Representa a cultura agrícola, $i = 1, \dots, m$;
- j – Representa o mês do ano, $j = 1, \dots, 12$;
- p_{ij} – Representa o preço da cultura cultura i no mês j (R\$ $\cdot$ kg^{-1});
- y_i – Produtividade média da cultura i (kg $\cdot$ ha^{-1});

• c_i – A média dos custos médios da cultura i (R$ · ha^{-1});

• x_{ij} – Área cultivada com a cultura i no mês j (ha);

• v_{ij} – Volume de água utilizado com a cultura i no mês j (m^3 · ha^{-1});

• VT_j – Volume total de água disponível no mês j (m^3);

• AT_j – Área total irrigável no mês j (ha).

No que segue, considera-se dado um perímetro irrigado com L lotes $(l = 1,2, \dots . L)$ de plantio, e a série de problemas de PL (PPL^l), associados à produção de cada lote do perímetro:

$$
(PPL^l) \qquad \begin{aligned}
& Maximizar\ \textstyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{12} r_{ij}^l\, x_{ij}^l \\
& Sujeito\ a\text{:}\quad \textstyle\sum_{i=1}^{m} v_{ij}^l\ x_{ij}^l \le VT_j^l \qquad j = 1, 2, \dots .12 \\
& \qquad\qquad\quad \textstyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^l\ \le AT_j^l \qquad j = 1, 2, \dots .12 \\
& \qquad\qquad\qquad x_{ij}^l \ge 0
\end{aligned}
$$

Onde $r_{ij}^l = p_{ij} y_i^l - c_i^l$, representa a receita líquida marginal da cultura i no mês j, lote l $(R\$\ ha^{-1})$, y_i^l a produção média da cultura i no lote l, c_i^l o custo médio de produção da cultura i no lote l. Note que o preço de cada cultura em cada mês, independe do lote. Mais ainda, x_{ij}^l (ha) representa a área a ser plantada no lote l da cultura i no mês j. Aqui v_{ij}^l representa o volume de água que precisa a cultura i no mês j para seu desenvolvimento no lote l, VT_j^l o volume total de água disponível no lote l, durante o mês j, e AT_j^l a área total irrigável no lote l, durante o mês j.

Suponha conhecidas L soluções ótimas $\bar{x}^l = (\bar{x}_{ij}^l)$ da série (PPL^l); isto é, $\bar{x}^l$ representa a tomada de decisão ótima para cada lote $l = 1,2, \dots L$. A meta do problema inverso de otimização aqui tratado é determinar um vetor $r = (r_{ij})$, tal que as condições de otimalidade do programa não-linear:

$$
(P^l) \qquad \begin{aligned}
& Maximizar\ \textstyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{12} r_{ij}\, x_{ij}^l \\
& Sujeito\ a\text{:}\quad \textstyle\sum_{i=1}^{m} v_{ij}^l\ x_{ij}^l \le VT_j^l \qquad j = 1, 2, \dots .12 \\
& \qquad\qquad\quad \textstyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^l\ \le AT_j^l \qquad j = 1, 2, \dots .12 \\
& \qquad\qquad\qquad x_{ij}^l \ge 0,\ \ r \in \mathbb{R}^{12m}
\end{aligned}
$$

sejam satisfeitas o mais aproximadamente possível pelas soluções ótimas $\bar{x}^l$, para cada $l = 1,2, \dots . L$. Note que desta maneira, o vetor $r = (r_{ij})$, representa devidamente as receitas $r^l = (r_{ij}^l)$ dos L lotes e permite avaliar economicamente a produtividade do perímetro irrigado através de (P^l).

O nome de inverso, deve-se a que, neste caso, procura-se determinar os coeficientes da função objetivo do modelo, ao invés da solução ótima do problema. Matematicamente, neste trabalho, procuraremos desenvolver um procedimento computacional que seja capaz de gerar um vetor $r \in \mathbb{R}^{12m}$, tal que para todo $l = 1,2, \dots . L$:

$$
\frac{\left| r^T \bar{x}^l - r^T {x^*}^l \right|}{\left| r^T \bar{x}^l \right|} < \mu_l \, ,
$$

$r^T \bar{x}^l \ne 0, \mu_l \in (0, 0.1)$ e ${x^*}^l$ uma solução ótima de (P^l). Assim teríamos que $r^T {x^*}^l$ representa devidamente os valores objetivos ótimos dos L lotes.

Note que para cada $l = 1,2, \dots . L$, (P^l) é um programa não linear nas variáveis $x_{ij}^l \in \mathbb{R}_+^{12m}$, $r \in \mathbb{R}^{12m}$, mas se r fosse conhecido, o problema dual associado ao então programa linear (P^l), estaria dado por:

$$(D^l) \quad Minimizar\ f(u^l, \xi^l) = \sum_{j=1}^{12} VT_j^l u_j^l + \sum_{j=1}^{12} AT_j^l \xi_j^l$$
$$Sujeito\ a: v_{ij}^l u_j^l + \xi_j^l - z_{ij}^l = r_{ij} \ \ i = 1,2, \dots . . m;\ j = 1, 2, \dots .12$$
$$u_j^l, \xi_j^l, z_{ij}^l \geq 0$$

Também o (P^l) pode ser escrito como:

$$Maximizar \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{12} r_{ij}\, x_{ij}^l$$
$$Sujeito\ a: \sum_{i=1}^{m} v_{ij}^l\ x_{ij}^l + w_j^{1l} = VT_j^l \qquad j = 1, 2, \dots .12$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^l\ + w_j^{2l} = AT_j^l \qquad j = 1, 2, \dots .12$$
$$x_{ij}^l \geq 0, w_j^{1l} \geq 0, w_j^{2l} \geq 0$$

Da teoria de dualidade, se x^l é primal viável e (u^l, ξ^l) dual viável, então:

$$f(u^l, \xi^l) - r^T x^l = (z^l)^T x^l + (w^{1l})^T u^l + (w^{2l})^T \xi^l \geq 0; \text{ou } r^T x^l \leq f(u^l, \xi^l)$$

(teorema fraco de dualidade) e a igualdade é alcançada nas soluções ótimas primal-dual. Por isso, a construção do modelo para resolver o problema inverso de otimização, incorpora a restrição contrária: $r^T x^l \geq f(u^l, \xi^l)$, ao sistema de desigualdades viáveis primal-dual; isto é, para cada $l = 1,2, \dots . L$, procuram-se vetores x^l e (u^l, ξ^l) tais que:

$$f(u^l, \xi^l) - r^T x^l \leq 0 \qquad (1)$$
$$\sum_{i=1}^{m} v_{ij}^l\ x_{ij}^l \leq VT_j^l \qquad j = 1, 2, \dots .12 \qquad (2)$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^l\ \leq AT_j^l \qquad j = 1, 2, \dots .12 \qquad (3)$$
$$r_{ij} - v_{ij}^l u_j^l - \xi_j^l \leq 0 \quad i = 1,2, \dots . . m;\ j = 1, 2, \dots .12 \qquad (4)$$

Voltando a nossa visão de r e u^l, ξ^l (multiplicadores de Lagrange) como variáveis, ao substituir x_{ij}^l por $\bar{x}_{ij}^l$ em (1)-(3), temos que (2)-(3) são trivialmente cumpridas e por isso resta agora o conjunto de desigualdades dadas por (1) e (4), ou seja, para cada $l = 1,2, \dots . L$:

$$f(u^l, \xi^l) - (\bar{x}^l)^T r \leq 0 \qquad (5)$$
$$r_{ij} - v_{ij}^l u_j^l - \xi_j^l \leq 0 \quad i = 1,2, \dots . . m;\ j = 1, 2, \dots .12$$

Este é um conjunto de $L(12m + 1)$ desigualdades lineares e $12(m + 2L)$ variáveis. Para efeitos numéricos, suponha que L é um inteiro positivo estritamente maior que $\frac{12m}{12m-23}$, assim existirão mais desigualdades do que variáveis. Na prática, em lugar de encontrar uma solução do sistemas de desigualdades (4)-(5), determina-se uma solução ótima do problema auxiliar de programação linear dado por:

$$(PA) \qquad Minimizar\ \sum_{l=1}^{L} \alpha_l$$
$$Sujeito\ a: \sum_{j=1}^{12} VT_j^l u_j^l + \sum_{j=1}^{12} AT_j^l \xi_j^l - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{12} \bar{x}_{ij}^l\ r_{ij} + \alpha_l \leq 0, \qquad l = 1,2, \dots . L$$
$$r_{ij} - v_{ij}^l u_j^l - \xi_j^l \leq 0 \qquad i = 1,2, \dots . . m;\ j = 1, 2, \dots .12, \quad l = 1,2, \dots . L$$

$$0 < \alpha_l < 1 \qquad\qquad l = 1,2, \ldots . L$$

$$u^l, \xi^l \geq 0,\ \ r \in \mathbb{R}^{12m} \qquad\qquad l = 1,2, \ldots . L$$

Note que uma solução ótima de (PA), gera vetores r, u^l, ξ^l tais que (4)-(5)- são satisfeitas. Agora, depois que a essência do problema e a respectiva teoria para seu tratamento foram apresentadas, se faz necessário detalhar um procedimento computacional para a utilização do modelo.

Procedimento

Dados: $m \geq 2$, L inteiro positivo estritamente maior que $\frac{12m}{12m-23}$, p_{ij}, y_i^l, c_i^l, v_{ij}^l, VT_j^l, AT_j^l com $i = 1,2, \ldots .. m$, $j = 1,2, \ldots .12$, $l = 1,2, \ldots . L$ (indicadores).

Começo

PASSO 1

Para cada $l = 1,2, \ldots . L$

Para cada $i = 1,2, \ldots .. m$

Para cada $j = 1,2, \ldots 12$

Calcular $r^l = (r_{ij}^l)$ onde $r_{ij}^l = p_{ij} y_i^l - c_i^l$

Para cada $l = 1,2, \ldots . L$

Fazer

$$\bar{x}^l = Argmax \left\{ \begin{matrix} (r^l)^T x^l :\ \sum_{i=1}^m v_{ij}^l\ x_{ij}^l \leq VT_j^l,\ \sum_{i=1}^m x_{ij}^l\ \leq AT_j^l,\ x_{ij}^l \geq 0, \\ j = 1,2, \ldots .12 \end{matrix} \right\}$$

PASSO 2

Resolver (PA)

Saída: $(r, u^l, \xi^l, \alpha_l)$

PASSO 3

Para cada $l = 1,2, \ldots . L$

Fazer

$$x^{*l} = Argmax \left\{ \begin{matrix} r^T x^l :\ \sum_{i=1}^m v_{ij}^l\ x_{ij}^l \leq VT_j^l,\ \sum_{i=1}^m x_{ij}^l\ \leq AT_j^l,\ x_{ij}^l \geq 0, \\ j = 1,2, \ldots .12 \end{matrix} \right\}$$

Para cada $l = 1,2, \ldots . L$

Enquanto $\gamma_l = r^T \bar{x}^l \neq 0$

Avaliar $erro = \frac{|r^T\bar{x}^l - r^T x^{*l}|}{|r^T\bar{x}^l|}$

Fim

O procedimento anterior é uma maneira de se determinar um vetor objetivo que representa aproximadamente os objetivos dos L lotes de plantios dados. No PASSO 1, gera-se a série de problemas associados aos L lotes. No PASSO 2, se resolve o PL auxiliar (PA), obtendo-se o vetor objetivo r, os multiplicadores de Lagrange, u^l, ξ^l e as variáveis α_l, que medem o grau de aproximação da solução primal-dual gerada pelo procedimento (para cada $l = 1,2, \dots . L$). No PASSO 3, encontra-se uma solução ótima do problema de PL com o vetor objetivo r (determinado no PASSO 2) e logo realizamos uma avaliação do erro relativo entre o valor $r^T x^{*l}$ e o valor ótimo do (P^l), agora com r representando os r^l. A implementação do procedimento foi realizada utilizando MATLAB.

O material ou dados utilizados no ensaio numérico a ser apresentados na próxima seção, correspondem ao perímetro irrigado de Gorutuba, localizado no município de Nova Porteirinha, norte do estado de Minas Gerais e descrito em Carvalho (1998) e Carvalho *et al.* (2000). Da mesma forma que o referido autor, nove lotes foram selecionados $(l = 1,2, \dots . L = 9)$ por apresentarem características de solo e sistemas de irrigação distintos. A escolha das culturas baseou-se na maior variedade, dentre aqueles implantados e com a maior diversidade de características físico-hídricas dos solos. Foi simulado o plantio de quatro culturas anuais: abóbora, feijão, milho, quiabo; e de quatro culturas perenes: banana prata, banana nanica, limão e manga $(i = 1,2, \dots . m = 8)$.

Resultados e Discussão

A **Tabela 1** apresenta os valores dos parâmetros: preços, produtividade média e custos das culturas anuais e perenes utilizados. Na obtenção dos custos totais $(\text{R\$} \cdot \text{ha}^{-1})$ para cada cultura, além dos valores na tabela, foi considerado o valor da tarifa de água cobrado no perímetro segundo informações do distrito de irrigação de Gorutuba. É importante ressaltar que a vigência dos valores desses parâmetros não foi considerada relevante, posto que o maior interesse do trabalho foi testar computacionalmente a confiabilidade do procedimento de calibração apresentado na seção anterior.

Em função dessas ofertas, as datas de plantio para as culturas anuais foram adotadas, considerando a duração média do ciclo da cultura. Para as culturas perenes, foram considerados, ao invés do mês de plantio, os meses em que a cultura estivesse produzindo, sendo o produto vendido àquele preço apresentado na **Tabela 1**. Dessa maneira, não se estava buscando qual a área a ser plantada e sim, qual a área que deveria estar produzindo em determinado mês com determinada cultura. Como não foi considerada a duração do ciclo da cultura, a produtividade média adotada para cada mês foi inversamente proporcional ao preço observado na região naquele mês, respeitando, dessa forma, a lei da oferta e da procura.

Nesta experiência numérica, estaremos supondo que o custo médio de produção de cada cultura agrícola, c_i, é o mesmo em qualquer lote, $l = 1,2, \dots . L$; isto é, $c_i^l = c_i$. Observando a **Tabela 1**, verificam-se os meses em que a oferta varia ao longo do ano e em função destas ofertas e duração média do ciclo de cada cultura, foram consideradas as datas de plantio das culturas anuais. Por exemplo, o feijão apresenta preços competitivos em nove meses do ano, sendo considerado como mês de plantio aquele que antecedia em três meses o mês com aquele preço. Por isso, foram considerados como meses de plantio: janeiro, fevereiro, março, abril, maio, julho, agosto, outubro e novembro, totalizando nove épocas. O mesmo foi feito para as outras culturas anuais, obtendo-se um mês de plantio para a abóbora, sete para o milho e dois para o quiabo.

A **Tabela 2** apresenta as produtividades médias de cada cultura em cada lote (y_i^l) (variantes da produtividade média de cada cultura (y_i) dada na **Tabela 1**).

Já a **Tabela 3**, mostra os volumes mensais de água necessários para o desenvolvimento de cada cultura considerada. Também nesta experiência numérica, estaremos supondo que o volume mensal necessário para o desenvolvimento de qualquer das culturas é o mesmo em qualquer lote $l = 1,2, \dots . L = 9$; isto é: $v_{ij}^{l} = v_{ij}$.

Tabela 1. Preços das culturas agrícolas (p_{ij}), produtividade média (y_i) e custos médios de produção (c_i) para as culturas consideradas, no perímetro irrigado de Gorutuba (MG).

	Abóbora	Feijão	Milho	Quiabo	Banana Prata	Banana Nanica	Limão	Manga
Mês	Preço das culturas agrícolas ($\mathrm{R\$ \cdot kg^{-1}}$)							
Janeiro		0.662			0.401	0.084	0.307	
Fevereiro		0.500	0.180	0.400	0.484	0.085	0.188	
Março			0.154		0.375	0.158	0.180	
Abril		0.750	0.148		0.404	0.126	0.180	
Maio		0.831	0.156		0.431	0.091	0.364	
Junho		0.830			0.601	0.090		
Julho		0.829	0.161		0.592	0.092		
Agosto		0.756	0.164	0.455	0.413	0.219	0.402	1.00
Setembro					0.315	0.182	0.751	
Outubro		0.818			0.214	0.269	0.751	
Novembro	0.20	0.752	0.156		0.215	0.158	0.384	0.294
Dezembro					0.198	0.092	0.429	0.219
	Produtividade ($\mathrm{kg \cdot ha^{-1}}$)							
	18.000	1.800	5.500	15.000	26.000	44.000	22.000	18.000
	Custo de produção ($\mathrm{R\$ \cdot ha^{-1}}$)							
	2.674.20	965.00	651.50	3.611.50	1951.5	2.676.5	996.40	1.615.90

Tabela 2. Produtividade média ($\mathrm{kg \cdot ha^{-1}}$) de cada cultura em cada lote do perímetro irrigado de Gorutuba-MG (y_i^l).

	Lotes								
Culturas	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Abóbora	18.000	9.000	6.000	4.500	3.600	3.000	2.571.42	2.250	2.000
Feijão	1.800	900	600	450	360	300	257.14	225	200
Milho	5.500	2.250	1.833.33	1.375	1.100	916.66	785.71	687.50	611.11
Quiabo	15.000	7.500	5.000	3.750	3.000	2.500	2.142.85	1.875	1.666.66
Banana Prata	26.000	13.000	8.666.66	6.500	5.200	4.333.33	3.714.28	3.250	2.888.88
Banana Nanica	44.000	22.000	14.666.66	11.000	8.800	7.333.33	6.285.71	5.500	4.888.88
Limão	22.000	11.000	7.333.33	5.500	4.400	3.666.66	3.142.85	2.750	2.444.44
Manga	18.000	9.000	6.000	4.500	3.600	3.000	2.571.42	2.250	2.000

Tabela 3. Volume de água mensal necessário para o desenvolvimento de cada cultura no perímetro irrigado de Gorutuba (MG). (v_{ij}).

	Abóbora	Feijão	Milho	Quiabo	Banana Prata	Banana Nanica	Limão	Manga
Mês	Volumes de água cultura-mês ($\mathbf{1000m^3}$)							
Janeiro		0.187			0.250	0.848	0.600	
Fevereiro		0.120	0.096	0.285	0.500	0.678	0.788	
Março			0.125		0.750	0.333	0.680	
Abril		0.250	0.238		0.704	1.326	0.880	
Maio		0.259	0.256		1.250	1.055	1.164	
Junho		0.266			1.501	1.090		
Julho		0.229	0.274		1.692	0.928		
Agosto		0.256	0.344	0.278	1.813	0.719	0.902	1.654
Setembro					1.915	0.982	0.851	
Outubro		0.268			2.214	1.269	1.251	
Novembro	0.384	0.272	0.356		1.215	1.158	0.984	1.894
Dezembro					2.198	1.092	0.729	2.019

A **Tabela 4** apresenta para cada lote l, os volumes de água disponíveis em cada mês do ano e as áreas irrigáveis em cada lote respectivamente O volume total de água disponível para cada lote l , no mês j (VT_j^l), foi considerado igual àquele fornecido para os lotes em cada mês ao longo do ano, e a área total irrigável (AT_j^l) foi ponderada como sendo a área irrigável de cada lote, ou seja, a área máxima possível de ser ocupada com o cultivo, no lote l e mês j (Carvalho *et al.* 2000).

Para todos os lotes foi considerada a área máxima possível de ser ocupada com o cultivo. Foram escolhidos entre cinco e nove lotes de plantio e a **Tabela 5** mostra os resultados obtidos.

Tabela 4. Volumes mensais de água $\left(VT_j^l\right)$ em 1000m^3 e área irrigável $\left(AT_j\right)$ em ha para os lotes estudados.

Lotes (l)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Mês				**Volumes Mensais** $(\mathbf{1000m^3})$					
Janeiro	53.10	11.09	12.35	5.15	5.29	6.35	13.36	6.55	12.35
Fevereiro	85.82	17.42	8.86	17.93	8.91	9.34	17.82	7.88	17.82
Março	59.80	11.09	5.74	11.38	05.81	5.74	12.17	3.92	11.48
Abril	60.26	14.26	7.06	7.16	7.06	7.06	14.11	6.88	14.44
Maio	88.02	17.42	8.78	8.78	17.68	8.78	17.93	8.68	15.92
Junho	75.29	15.84	15.84	7.92	8.10	7.92	9.70	8.10	13.08
Julho	71.14	15.84	15.84	7.92	8.35	8.35	15.60	7.85	14.19
Agosto	81.00	16.63	7.92	7.87	8.30	8.30	14.61	9.11	14.95
Setembro	76.32	16.42	7.35	7.49	7.49	7.49	14.98	8.93	13.33
Outubro	52.81	12.10	10.62	5.18	2.66	5.31	10.26	6.55	8.32
Novembro	19.08	4.32	3.96	1.98	1.80	1.99	3.96	2.59	2.31
Dezembro	18.00	6.05	4.54	2.27	1.95	2.95	5.29	2.23	2.89
				Área (ha)					
	38.00	11.00	8.46	3.51	5.94	2.95	8.16	5.90	7.97

Tabela 5. Resultados obtidos da implantação computacional do procedimento apresentado.

L	Lotes	$r^T x^{*l}$	$r^T \bar{x}^l$	$erro = \dfrac{\lvert r^T\bar{x}^l - r^T x^{*l}\rvert}{\lvert r^T\bar{x}^l\rvert}$
5	1	4884909.309365	4884909.309365	1.906530e-16
	2	1414052.694816	1414052.694816	1.646549e-16
	3	1087535.072559	1087535.072559	4.281805e-16
	4	451211.359891	451211.359891	1.290031e-16
	5	763588.455201	763588.455201	0
6	1	4884909.309365	4884909.309365	0
	2	1106017.202120	1106017.202120	2.105127e-16
	3	1013849.101944	1013849.101944	1.148251e-16
	4	506924.550972	506924.550972	1.148251e-16
	5	460840.500883	460840.500883	1.263076e-16
	6	509484.775977	509484.775977	1.142481e-16
7	1	4884909.309365	4884909.309365	1.906530e-16
	2	1106017.202120	1106017.202120	0
	3	1013849.101944	1013849.101944	1.148251e-16
	4	506924.550972	506924.550972	1.148251e-16
	5	460840.500883	460840.500883	1.263076e-16
	6	509484.775977	509484.775977	1.142481e-16
	7	1013849.101944	1013849.101944	1.148251e-16
8	1	4884909.309365	4884909.309365	1.906530e-16
	2	1106017.202120	1106017.202120	2.105127e-16
	3	1013849.101944	1013849.101944	2.296502e-16
	4	506924.550972	506924.550972	0
	5	460840.500883	460840.500883	2.526152e-16
	6	509484.775977	509484.775977	0
	7	1013849.101944	1013849.101944	2.296502e-16
	8	663098.276271	663098.276271	3.511254e-16
9	1	4884909.309365	4884909.309365	3.813060e-16
	2	1414052.694816	1414052.694816	3.293097e-16
	3	1087535.072559	1087535.072559	6.422707e-16
	4	451211.359891	451211.359891	6.450155e-16
	5	763588.455201	763588.455201	1.524582e-16
	6	379223.222701	379223.222701	4.604754e-16
	7	1048969.999064	1048969.999064	2.219612e-16
	8	758446.445401	758446.445401	4.604754e-16
	9	1024545.452517	1024545.452517	1.136263e-16

Agradecimentos

Os autores agradecem aos avaliadores pela revisão crítica do manuscrito.

Conclusões

O procedimento computacional implementado mostra um bom comportamento se observamos os resultados obtidos. Os erros relativos entre o valor $r^T x^{*l}$ e o valor ótimo do (P^l), agora com r representando os r^l, são satisfatórios, e portanto, o objetivo do trabalho apresentado é alcançado.

Referências

Bazaraa M.C., Sherali H.D. & Shetty H.D. (1979) Nonlinear Programming: Theory and Algorithms. New York: John Wiley. 638 p.

Carvalho D.F. (1998) Otimização do uso da água no perímetro irrigado do Gorutuba. Tese (Programa de Pós-Graduação em Engenharia Agrícola), Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, Minas Gerais.

Carvalho D.F., Soares A., Ribeiro C.A., Sediyama C.G. & Pruski F. (2000) Otimização do uso da água no perímetro irrigado do Gorutuba, utilizando-se a técnica da programação linear. *Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental*, 4(2): 203–209. https://doi.org/10.1590/S1415-43662000000200012

Delgado A.R.S., Ventura S.D., Carvalho D.F. & Santos R.D. (2010) Determinação de intervalos ótimos de irrigação utilizando barreira logarítmica. *Revista Brasileira de Agricultura Irrigada*, 4(2): 128–138. https://doi.org/10.7127/rbai.v4n200030

Frizzone J.A., Andrade A.S., de Souza J.L.M. & Zocoler J.L. (2005) Planejamento de irrigação. Análise de decisão de investimentos. Brasília: EMBRAPA. 627 p.

Frizzone J.A., Coelho R.D., Dourado D.N. & Soliane R. (1997) Linear programming model to optimize the water resource use in irrigation projects: an application to the Senator Nilo Coelho Project. *Scientia Agricola*, 54(especial): 136–148. https://doi.org/10.1590/S0103-90161997000300016